Поглавље 2

Булова алгебра и бинарна логика

У овом поглављу се излажу основне поставке Булове алгебре као и њене основне теореме и особине. Такође, дефинишу се принципи бинарне логике и њихова физичка интерпретација као и веза са Буловом алгебром. Кроз бинарну логику дефинишу се основне логичке функције као и њихова различита физичка реализација.

2.1 Дефиниција Булове алгебре

Дефиниција 2.1 *Бинарни оператор на скупу елемената S је правило по коме се сваком пару елемената из S придружује јединствени елемент такође из S.*

Дефиниција 2.2 *Скуп S је затворен у односу на неки бинарни оператор $\iff$ тај бинарни оператор сваком пару елемената из S придружује јединствен елемент који такође припада скупу S.*

Види се да дефиниција бинарног оператора на скупу S имплицитно у себи садржи и дефиницију затворености тог истог скупа у односу на тај бинарни оператор.

Дефиниција 2.3 *Бинарни оператор $*$ на скупу S је комутативан $\iff$ $x * y = y * x, \forall x, y \in S$.*

Дефиниција 2.4 *e је неутрални елемент скупа S у односу на бинарну операцију $* \iff e * x = x * e = x, \forall x \in S$.*

Дефиниција 2.5 *Ако су $*$ и $\bullet$ два бинарна оператора на скупу S каже се да је бинарни оператор $*$ дистрибутиван у односу на бинарни оператор $\bullet \iff$ $x * (y \bullet z) = (x * y) \bullet (x * z), \forall x, y, z \in S$.*

Дефиниција 2.6 *Бинарни оператор $*$ на скупу S је асоцијативан $\iff$ $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in S$.*

Џорџ Бул је 1854. године развио алгебарски систем који се сада по њему назива Булова алгебра.

Дефиниција 2.7 *Булова алгебра је алгебарска структура која се састоји од скупа елемената B, два бинарна оператора $+$ и $\cdot$ таква да су испуњени Хантингтонови аксиоми односно постулати из 1904. године:*

1. *а) затвореност у односу на оператор $+$,*

   б) затвореност у односу на оператор $\cdot$,

2. *а) неутрални елемент у односу на оператор $+$ означен са 0 је такав да је $x + 0 = 0 + x = x$,*

   б) неутрални елемент у односу на оператор $\cdot$ означен са 1 је такав да је $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$,

3. *а) комутативност у односу на оператор $+ : x + y = y + x$,*

   б) комутативност у односу на оператор $\cdot : x \cdot y = y \cdot x$,

4. *а) бинарни оператор $\cdot$ је дистрибутиван у односу на бинарни оператор $+ : x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$,*

   б) бинарни оператор $+$ је дистрибутиван у односу на бинарни оператор $\cdot : x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$,

5. *сваком елементу* $x \in B$ *одговара тз. комплемент* $\overline{x} \in B$ *такав да је* $x + \overline{x} = 1$ *и* $x \cdot \overline{x} = 0$,

6. *постоје бар два елемента* $x, y \in B$ *таква да је* $x \neq y$.

Ово нису једини аксиоми (постулати) помоћу којих се може дефинисати Булова алгебра. То је могуће и помоћу Биркоф-Бартијевих аксиома из 1970. године.

На основу изложеног виде се сличности Булове алгебре са обичном алгебром али су уочљиве и разлике као нпр. испуњеност аксиома 4б) и 5 у Буловој алгебри. Потребно је имати у виду ове разлике посебно због тога што су симболи $+$ и $\cdot$ за два бинарна оператора Булове алгебре позајмљена из обичне алгебре тако да постоји опасност да се примене нека правила обичне алгебре која не важе у Буловој алгебри.

Могуће је формирати више Булових алгебри у зависности од броја елемената скупа B али је у овим излагањима од посебног интереса тз. двовредносна Булова алгебра коју је увео Шенон 1938. године.

2.1.1 Дво-вредносна Булова алгебра

Дво-вредносна Булова алгебра је дефинисана на скупу од само два елемента, $B = \{0, 1\}$. Променљиве дво-вредносне Булове алгебре у ознаци x, y, z узимају вредности са скупа B. Правила за два бинарна оператора $+$ и $\cdot$ као и за комплемент оператор (постулат 5) ове алгебре су дефинисана табеларно:

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

Вежба 2.8 *Показати да за скуп* B *и претходно дефинисане бинарне операторе важе Хантингтонови постулати.*

Дво-вредносна Булова алгебра ће се у даљим излагањима означавати просто као Булова алгебра или прекидачка (контактна) алгебра.

2.1.2 Основне теореме и особине Булове алгебре

Принцип дуалности (двојности) *Алгебарски израз Булове алгебре остаје у важности после промене бинарних оператора и неутралних елемената у њему.*

Пошто су неутрални елементи једнаки са елементима скупа B, то се горњи поступак спроводи тако што се оператори $+$ и $\cdot$ међусобно замене и свугде 1 замени са 0 односно 0 замени са 1.

Теорема 2.9 *а)* $x + x = x$; *доказ:* $x + x = (x + x) \cdot 1 = (x + x)(x + \overline{x}) = x + x \cdot \overline{x} = x + 0 = x$,

б) $x \cdot x = x$; *доказ:* $x \cdot x = x \cdot x + 0 = x \cdot x + x \cdot \overline{x} = x \cdot (x + \overline{x}) = x \cdot 1 = x$.

Теорема 2.10 *а)* $x + 1 = 1$; *доказ:* $x + 1 = 1 \cdot (x + 1) = (x + \overline{x}) \cdot (x + 1) = x + \overline{x} \cdot 1 = x + \overline{x} = 1$,

б) $x \cdot 0 = 0$; *по принципу дуалности (двојности).*

Теорема 2.11 $\overline{(\overline{x})} = x$; *доказ: из дефиниције комплемента у постулату број 5 комплемент од* $\overline{x}$ *је* x*, што доказује теорему.*

Теорема 2.12 *а)* $x + (y + z) = (x + y) + z$; *без доказа,*

б) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$; *без доказа.*

Теорема 2.13 (ДеМорганова теорема) *а)* $\overline{(x + y)} = \overline{x}\overline{y}$; *без доказа,*

б) $\overline{(x \cdot y)} = \overline{x} + \overline{y}$; *без доказа.*

Теорема 2.14 (Теорема о апсорпцији) *а)* $x + x \cdot y = x$; *доказ:* $x + x \cdot y = x \cdot 1 + x \cdot y = x \cdot (1 + y) = x \cdot (y + 1) = x \cdot 1 = x$,

б) $x \cdot (x + y) = x$; *по принципу дуалности.*

2.2 Бинарна логика

Под бинарном логиком подразумевају се логичке операције И, ИЛИ и НЕ које су дефинисане уз помоћ променљивих означених словима нпр. $x, y, z \cdots$, при чему ове променљиве могу имати само две вредности 0 и 1.

Дефиниција 2.15 *Логичка операција И означава се тачком или њеним одсуством, нпр.* $x \cdot y = z$ *или* $xy = z$*, чита се* x *И* $y = z$*, а значи да је* $z = 1$ *једино ако је* $x = 1$ *и* $y = 1$ *у исто време, у противном је* $z = 0$.

Дефиниција 2.16 *ИЛИ логичка операција се означава са* $+$*, нпр.* $x + y = z$*, чита се* x *ИЛИ* $y = z$ *и значи да је* $z = 0$ *једино ако је* $x = 0$ *и* $y = 0$ *у исто време, у противном је* $z = 1$.

Дефиниције логичких операција И и ИЛИ могу бити приказане и табеларно, тако што се у њој, свакој могућности у погледу вредности променљивих x и y, придружују одговарајуће вредности променљиве z и за једну и за другу логичку операцију. У табели 9.1 су приказане дефиниције логичких операција И и ИЛИ.

Дефиниција 2.17 *НЕ логичка операција се означава са* $\bar{x} = z$*, чита се НЕ* $x = z$*, а значи да је* $z = 1$ *ако је* $x = 0$ *и да је* $z = 0$ *ако је* $x = 1$.

И и ИЛИ логичке операције			
x	y	$x \cdot y = z$	$x + y = z$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Табела 2.1: Дефиниција логичких операција И и ИЛИ

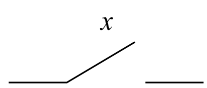
НЕ логичка операција	
x	$\bar{x} = z$
0	1
1	0

Табела 2.2: Дефиниција НЕ логичке операције

У табели 9.2 је приказана дефиниција НЕ логичке операције.

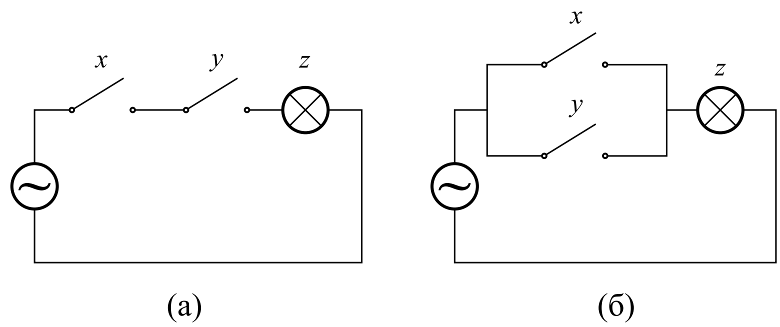
Види се да логичке операције И, ИЛИ, НЕ бинарне логике у потпуности одговарају већ уведеним бинарним операторима $+, \cdot$ и комплемент оператору у Буловој алгебри. То значи да се кроз бинарну логику неформално уводи Булова алгебра. Зашто је Булова алгебра важна? Булова алгебра је математички апарат помоћу кога се математички описују процеси обраде бинарних информација.

Раније је објашњено зашто су код дигиталних система заступљени бинарни сигнали, који су, очигледно, по својој природи дискретни, у смислу, да могу да имају само две унапред одређене вредности, које су кôдиране са 0 и 1, и ниједну другу вредност. Такође, већ је речено, да су с тим у вези дигитални системи изграђени од елемената који могу да имају само два различита стања, док је прелаз између та два стања краткотрајан и може се занемарити, тј. тај прелаз идеално посматрано је бесконачно кратак. Елемент, који се управо понаша на описани начин, и који може да послужи да се помоћу њега физички интерпретирају наведене логичке операције, како би се лакше схватило њихово значење, је тз. *контакт* или из обичног живота познатији појам, *прекидач*. На слици 9.1 је приказан симбол прекидача, који очигледно показује да прекидач може да има само два стабилна стања, тј. да је отворен или да је затворен, стим да је прелаз између ова два стања врло краткотрајан, идеално посматрано, бесконачно кратак.



Слика 2.1: Симбол прекидача

Прекидач по својој физичкој природи може да буде разноврстан, али се овде мисли превасходно на електрични прекидач, који ће се овде користити у електричним колима помоћу којих ће се физички интерпретирати наведене логичке операције. Затварање и отварање прекидача се остварује тз. његовим активирањем помоћу бинарног сигнала, који има само две вредности означене са 1 и 0, тако да се прекидач затвори кад је сигнал за активирање једнак 1, а отвори кад је тај сигнал једнак 0. С једне стране бинарни сигнал за активирање прекидача је бинарна променљива, нпр. x, а с друге стране бинарна природа прекидача омогућава да се и помоћу њега физички реализује нека бинарна променљива. Бинарна променљива која се физички реализује помоћу приказаног прекидача има вредност 0 када је прекидач отворен и вредност 1 када је прекидач затворен. Очигледно, бинарна променљива која се остварује помоћу прекидача има исте вредности као и променљива x за активирање прекидача, тако да се иста та променљива x остварује помоћу прекидача. Због тога се променљива x пише поред симбола за приказани прекидач чиме се симболично показује да се та променљива физички реализује помоћу тог прекидача. Приказани прекидач се назива *нормално отворени* или *радни* прекидач. На слици 9.2 (а) је приказано струјно коло које садржи два прекидача и сијалицу, везане на ред, при чему ово струјно коло физички интерпретира И логичку операцију.



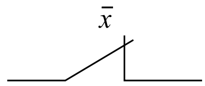
Слика 2.2: Физичка интерпретација логичких операција И и ИЛИ помоћу струјног кола

Слично као што прекидачи реализују бинарне променљиве тако и сијалица реализује бинарну променљиву чија је вредност једнака 1 када сијалица светли и 0 када сијалица не светли. Очигледно, сијалица ће да светли када су оба прекидача у исто време затворена, а у свим другим случајевима сијалица неће да светли. Другим речима, бинарна променљива z, која се физички реализује помоћу сијалице, имаће вредност 1 једино када бинарне променљиве x и y, које се физички реализују помоћу прекидача, имају вредност 1 обе у исто време, а у свим другим случајевима променљива z ће бити једнака 0. То није ништа друго до логичка операција И чиме је разјашњено какво је њено физичко тумачење.

На слици 9.2 (б) је приказано струјно коло које садржи, такође, два прекидача, али сада везаних паралелно и сијалицу која је везана редно са поменутом паралелном спрегом прекидача.

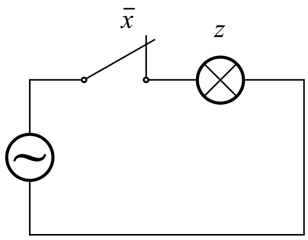
Очигледно, сијалица неће да светли када су оба прекидача у исто време отворена, а у свим другим случајевима сијалица ће да светли. Другим речима, бинарна променљива z имаће вредност 0 једино када бинарне променљиве x и y имају вредност 0, обе у исто време, а у свим другим случајевима променљива z ће бити једнака 1. То није ништа друго до логичка операција ИЛИ чиме је разјашњено какво је њено физичко тумачење.

За разлику од до сада помињаног прекидача, на слици 9.3 је приказан симбол такозваног *нормално затвореног* или *мирног* прекидача.



Слика 2.3: Симбол нормално затвореног или мирног прекидача

Овај прекидач је затворен када није активиран и обрнуто отворен када је активиран, тако да ради инверзно у односу на нормално отворени прекидач. То значи да када је променљива x за активирање прекидача једнака нули, тј. кад прекидач није активиран, онда бинарна променљива која се реализује помоћу прекидача има вредност 1 и обрнуто када је променљива x једнака 1 бинарна променљива која се реализује помоћу прекидача има вредност 0. Очигледно су вредности променљиве x и променљиве која се реализује помоћу прекидача супротне тако да је променљива која се остварује помоћу прекидача негација односно комплемент променљиве x, у већ раније датој ознаци $\bar{x}$. Поред овог прекидача се пише ова ознака $\bar{x}$ што симболично означава да се баш та бинарна променљива остварује помоћу овог прекидача. На слици 9.4 је приказано струјно коло које садржи нормално затворени прекидач везан на ред са сијалицом тако да ово струјно коло физички реализује НЕ логичку операцију.



Слика 2.4: Физичка реализација НЕ логичке операције помоћу струјног кола

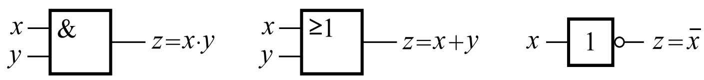
Очигледно да ће сијалица да светли када прекидач није активиран, тј. када је прекидач затворен и обрнуто сијалица неће да светли када је прекидач активиран, а тада је он отворен. Друкчије исказано, z ће имати вредност 1 када је $x = 0$ тј. када је $\bar{x} = 1$ и обрнуто z ће имати вредност 0 када је $x = 1$ тј. када је $\bar{x} = 0$. То није ништа друго до логичка операција НЕ чије је физичко тумачење на овај начин дато. Види се да је негација, односно комплемент, бинарне променљиве резултат примене НЕ логичке операције над том променљивом.

На логичке операције и променљиве које учествују у њима може се и друкчије гледати. Променљиве x и y у логичким операцијама И и ИЛИ и променљива x у логичкој операцији НЕ се могу сматрати *независним логичким променљивим* а променљива z се може сматрати *зависном логичком променљивом* односно *логичком функцијом.* Овде постоји аналогија са свим другим врстама функција у смислу постојања зависности између независних променљивих и зависних променљивих, с тим што је та зависност овде логичка. Логичке операције одређују тз. основне логичке функције. Логичка операција И одређује И логичку функцију која се друкчије назива логичко множење.

Логичка операција ИЛИ одређује ИЛИ логичку функцију која се друкчије назива логичко сабирање.

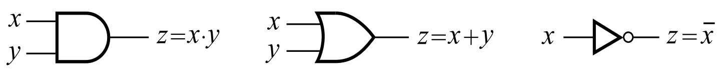
Логичка операција НЕ одређује НЕ логичку функцију.

Логички симболи за ове основне логичке функције су приказани на слици 9.5.



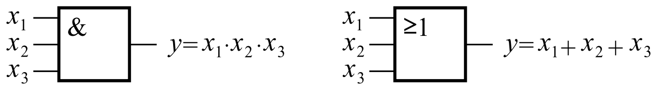
Слика 2.5: Логички симболи за логичке функције И, ИЛИ и НЕ

Приказани символи представљају нове симболе, дефинисане стандардом, при чему се коришћење старих симбола још увек може срести у литератури, било да се ради о старијим издањима када су били у важности стари символи, или да се у новим издањима користе стари символи. Да би се омогућило успешно коришћење литературе, на слици 9.6 су дати и стари символи за основне логичке функције.



Слика 2.6: Стари символи за логичке функције И, ИЛИ и НЕ

Логичке операције И и ИЛИ тј. логичке функције И и ИЛИ могу бити дефинисане и за више од две независне променљиве. Њихови логички символи су потпуно исти као и логички символи за случај две независне променљиве, с том разликом што број улаза у логички симбол одговара новом броју независних променљивих. На слици 9.7 су приказани логички символи за логичке операције И и ИЛИ са три независне променљиве.

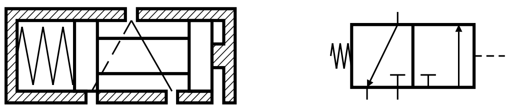


Слика 2.7: Логички симболи за логичке операције И и ИЛИ са три независне промењљиве

2.3 Техничко извођење основних логичких функција

Основне логичке функције се реализују помоћу основних логичких елемената који могу бити физички и технички реализовани на различите начине.

Пнеуматско и хидрауличко извођење може да буде помоћу тз. *разводника*. На слици 9.8 је приказан попречни пресек и стандардом дефинисан симбол *пнеуматског (хидрауличког), моностабилног, пнеуматски (хидраулички) активираног 3/2 клипног разводника.*

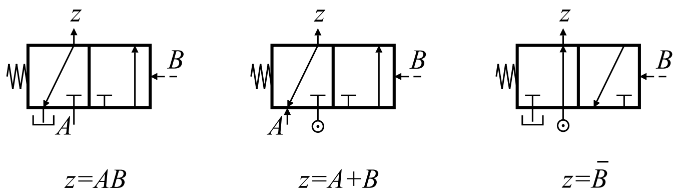


Слика 2.8: Попречни пресек и симбол 3/2 разводника

Сам назив и попречни пресек приказан на слици 9.8 показује да је разводник уређај који служи за развођење, тј. усмеравање, тока флуида (ваздуха или уља под притиском). Унутар разводника се налази покретни клип који може да има само два различита радна положаја, крајњи леви и крајњи десни. Радни положаји клипа дефинишу такозване *положаје укључивања* разводника. У крајњи леви положај, насупрот дејству силе опруге, клип долази под дејством ваздуха (уља) под притиском који се доводи на посебан прикључак намењен за тз. активирање разводника. Овај положај укључивања је нестабилан због тога што по престанку дејства сигнала за активирање клип се под дејством опруге враћа у крајњи десни положај, који је стабилан. Отуда је назив моностабилан, јер овај разводник има само један стабилан радни положај клипа. Прелаз из јеног у други радни положај, клип остварује за веома кратко време, идеално посматрано тренутно. У ознаци 3/2, 3 означава укупан број прикључака разводника не рачунајући прикључак за активирање, а 2 означава број радних положаја клипа тј. положаја укључивања.

Симбол разводника се састоји од два квадрата при чему сваки од њих означава по један положај укључивања. Прикључци разводника су наспрам левог квадрата у неактивираном стању разводника и тада је леви квадрат у важности. Формално се сматра да су прикључци непомични а да се при активирању разводника цео симбол помера с десна улево, све док десни квадрат не дође наспрам прикључака и тада је десни квадрат у важности.

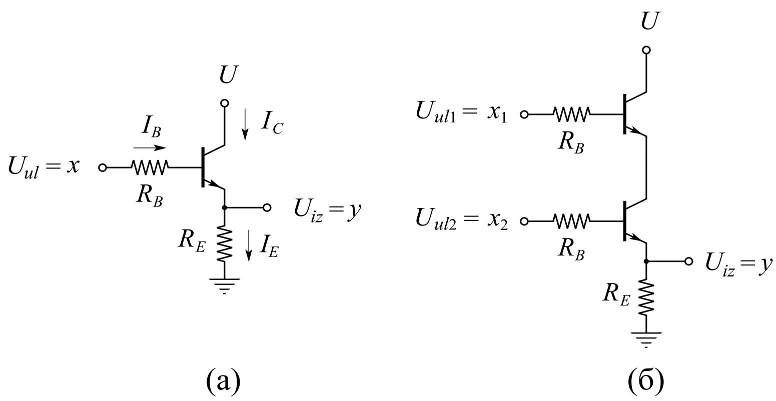
На слици 9.9 је приказано остваривање основних логичких функција помоћу разводника 3/2.



Слика 2.9: Реализација основних логичких функција помоћу разводника 3/2

При томе је за реализацију логичких функција И и ИЛИ коришћен тз. *нормално затворен* а за логичку функцију НЕ *нормално отворен* разводник. Симболи нормално затвореног и нормално отвореног разводника се разликују утолико што су код нормално отвореног, квадрати, који чине симбол нормално затвореног разводника, заменили места. Суштински ради се о конструктивној разлици, тако да је у неактивираном стању са истог прикључка струјни ток флуида ка излазу, код нормално затвореног разводника прекинут, а код нормално отвореног успостављен.

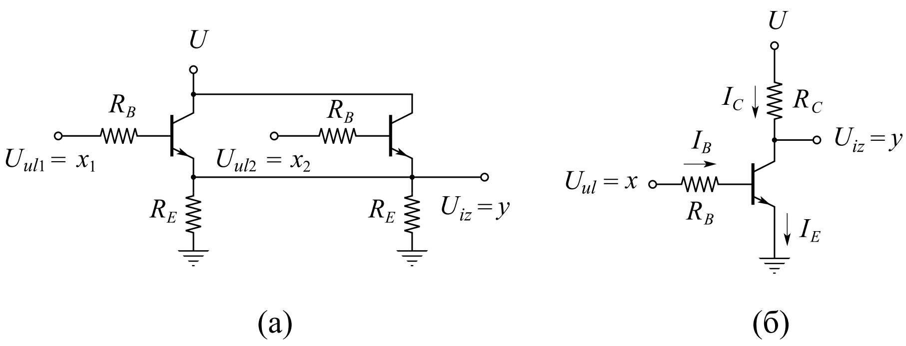
Електронско извођење основних логичких функција је помоћу транзистора. Транзистор повезан као што је приказано на слици 9.10 (а) реализује логичку функцију ДА.



Слика 2.10: Електронско извођење логичких функција ДА и И помоћу транзистора

Ако се овако повезана два транзистора спрегну редно онда се на тај начин реализује логичка функција И што је приказано на слици 9.10 (б). Ако се два транзистора повезана као на слици 9.10 (а) спрегну паралелно онда се на тај начин реализује логичка функција ИЛИ што је приказано на слици 9.11 (а).

На слици 9.11 (б) је приказан транзистор који је повезан тако да реализује основну логичку функцију НЕ.



Слика 2.11: Електронско извођење логичких функција ИЛИ и НЕ помоћу транзистора