Дигитални системи

Зоран М. Бучевац

Дигитални системи

Београд, 2007.

Садржај

Поглавље 1

Системи бројева

У овом поглављу се дају дефиниције различитих система бројева при чему је акценат стављен на бинарне бројеве јер је њихова примена и заступљеност природна код дигиталних система. Приказани су поступци претварања бројева из једног система бројева у други, аритметичке операције у бинарном систему бројева као и дефиниције различитих комплемената и извођења аритметичке операције одузимања помоћу комплемената. Дати су различити бинарни кôдови за кôдирање дискретних елемената информација.

1.1 Дефиниције различитих система бројева

Шта је то систем бројева?

Шта значи бројати у неком систему бројева?

Да би се одговорило на постављена питања полази се од скупа неких елемената, на пример, скупа куглица. За означавање различитих количина куглица посматраног скупа неопходно је користити неке симболе. При томе су могућа два приступа. Један приступ је да се за сваку количину куглица посматраног скупа одреди посебан симбол. Овакав приступ је неповољан јер је у случају јако великог скупа куглица тешко пронаћи различите симболе за сваку другу количину куглица. Други приступ је да се уведе коначно много тз. основних симбола и да се било која количина куглица представи неким од основних симбола или неком комбинацијом неких основних симбола при чему се основни симболи комбинују према унапред утврђеним правилима. На овај начин се избегава проблем недостатка симбола. Очигледно да је овај други приступ повољнији и због тога се он и усваја за наведену сврху. Треба приметити да у овом поглављу још увек није употребљен појам **број** изузев у питањима која су постављена на почетку.

Дефиниција 1.1 *Систем бројева је кôд за означавање, представљање различитих количина елемената неког скупа.*

Друкчије речено, под системом бројева[1] подразумева се скуп симбола, такозваних бројева, који се користе да представе различите количине елемената неког скупа. При томе систем бројева има коначно много основних симбола.

Дефиниција 1.2 *Основни симболи једног система бројева се називају његове цифре којих укупно има коначно много и што представља тз. основу или базу тог система бројева.*

Помоћу цифара неког система бројева, било која количина елемената посматраног скупа може се представити појединачним цифрама или неком комбинацијом неких цифара. Комбинација цифара се врши према унапред утврђеном правилу.

Очигледно да може постојати више различитих система бројева у зависности од тога колико тај систем бројева има цифара.

Под бројањем у неком систему бројева подразумева се узастопно низање бројева тог система бројева почев од најмањег броја па навише при чему сваки наредни број означава прву следећу већу количину елемената у односу на количину елемената која је означена са претходним бројем.

Овде ће бити поменута четири система бројева: децимални систем бројева, бинарни систем бројева, октални систем бројева и хексадецимални систем бројева.

[1] Може да се користи **бројчани систем** али је погрешно да се користи **бројни систем**.

Када се каже број обично се мисли на број из децималног система бројева. То је због тога што је овај систем бројева у скоро искључивој примени у пракси. Без обзира што је децимални систем бројева добро познат, овде ће бити изложене његове основне поставке. У табели 1.1 су упоредно дате цифре децималног система бројева, њихова имена и одговарајуће количине елемената неког скупа нпр. куглица које те цифре представљају.

Цифра	**Име цифре**	**Количина куглица**
0	нула	
1	један	●
2	два	●●
3	три	●●●
4	четири	●●●●
5	пет	●●●●●
6	шест	●●●●●●
7	седам	●●●●●●●
8	осам	●●●●●●●●
9	девет	●●●●●●●●●

Табела 1.1: Цифре децималног система бројева, њихова имена и одговарајуће количине куглица

Логично питање се намеће: како означити количину куглица већу од количине означене са 9, нпр. количину куглица ●●●●●●●●●●. Очигледно да је ова количина већа за једну куглицу од оне која је означена са 9. Ова количина куглица се означава тако што се другој цифри, дакле цифри 1, придружи прва цифра, дакле цифра 0, тако да се добије 10. Оваквом комбинацијом ове две цифре добијен је број који има своје име које је добро познато а то је **десет.** Количина куглица која је већа за једну куглицу од претходно наведене количине куглица означава се тако што се узме друга цифра, тј. цифра 1, па јој се придружи опет друга цифра, тј. цифра 1, тако да се добије 11. Добро нам је познато да је на овај начин добијен број који има своје име а то је **једанаест**. И тако редом, добијају се 12 (дванаест), 13 (тринаест), да би на крају биле исцрпљене све могућности комбиновања две цифре бројем 99 (деведесет девет). Следећа већа количина куглица се означава тако што се узме друга цифра, тј. цифра 1, па се њој придружи два пута прва цифра, тј. цифра 0, тако да се добије 100, а то је број чије је име **сто**. И тако редом. Ово што је сада описано није ништа друго до бројање у децималном систему бројева.

Под бројањем у децималном систему бројева се подразумева узастопно низање (ређање) децималних бројева почев од најмањег, а то је цифра односно број 0, ка већим бројевима, при чему сваки наредни број означава прву следећу већу количину елемената у односу на количину елемената која је означена са претходним бројем.

Очигледно је да децимални систем бројева има десет цифара тако да је његова основа тј. база 10.

Уместо већ приказаних симбола који су усвојени за цифре децималног система бројева могло се потпуно равноправно усвојити да то буду и неки друкчији симболи, нпр. A, B, C, ... при чему би A означавало количину од ниједне куглице, B следећу количину • итд. Важеће цифре децималног система бројева се користе са лакоћом зато што смо навикнути на њих и чим видимо или изговоримо неку цифру ми одмах знамо њено значење јер је то значење меморисано у људском мозгу и на тај начин ми имамо осећај за значење сваке цифре па и шире тј. већих бројева. Ако би смо за тренутак замислили да се уместо важећих цифара децималног система бројева уводе друкчији симболи нпр. A, B, C, D, E, F, G, H, I, J и изговоримо или напишемо цифру G или пак број GH ми небисмо имали осећај за значење те цифре и тог броја из простог разлога што у нашем мозгу због не коришћења није меморисано да је G нешто што одговара добро познатој цифри 6 нити да је GH нешто што одговара добро познатом броју 67.

Да би са сигурношћу могло за неки број да се зна да је то број из децималног система бројева усвојен је следећи начин писања децималних бројева: децимални број се стави у малу заграду а у доњем десном углу ван заграде на месту доњег индекса се напише основа 10 децималног система бројева. Овај начин писања децималног броја се илуструје у следећем примеру.

Пример 1.1 $(100)_{10}$. *Очигледно да је приказани број децимални број* **сто**.

$(a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-m})_{10}$ представља уопштени запис децималног броја при чему су $a_{-m}, \cdots, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ неке цифре децималног система бројева. Добро је познато да је количина изражена приказаним дециамлним бројем одређена са следећим изразом

$$a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 10^0 + a_{-1} 10^{-1} \cdots + a_{-m} 10^{-m}. \quad (1.1)$$

Очигледно да свака цифра децималног броја има поред своје цифарске вредности и такозвану месну вредност што није ништа друго до неки степен основе децималног система бројева тј. броја 10 у зависности од тога коју позицију посматрана цифра заузима у посматраном децималном броју.

Код бинарног система бројева све је слично као код децималног система бројева с том разликом што бинарни систем бројева има мањи број цифара.

Дефиниција 1.3 *Систем бројева који има само две цифре* 0 *и* 1 *па према томе чија је основа или база једнака два је* **бинарни систем бројева**.

У табели 1.2 су упоредно приказане цифре бинарног система бројева, њихова имена и одговарајуће количине куглица које те цифре представљају. Због тога што их има само две те цифре се називају бинарне цифре или **битови**.

Цифра	**Име цифре**	**Количина куглица**
0	нула	
1	један	•

Табела 1.2: Цифре бинарног система бројева, њихова имена и одговарајуће количине куглица

Као што се види из табеле 1.2 за цифре бинарног система бројева су усвојени симболи који су исти као симболи за прве две цифре децималног система бројева. Било је могуће усвојити и неке друге, било које, симболе, као на пример слова A и B тако да би A означавало празан скуп куглица а B скуп који се састоји од једне куглице. Дакле усвојен је принцип да ако неки систем бројева има мањи број цифара него што је случај код децималног система бројева онда се за цифре тог система бројева позајмљују прве цифре из децималног система бројева односно када систем бројева има већи број цифара него што је случај код децималног система бројева онда се позајмљују све цифре децималног система бројева и надопуњују до потребног броја првим великим словима абецеде.

Слично као код децималног система бројева, поставља се питање како ће се у бинарном систему бројева представити веће количине куглица од оне која је представљена цифром 1. Нпр. како ће се представити количина од две куглице. То се ради тако што се узме друга цифра из овог система бројева а то је 1 и њој се придружи прва цифра тако да се добије 10. Добијен је број у бинарном систему бројева који представља количину од два елемента (две куглице) неког скупа. Да би се направила разлика између овог броја и броја десет из децималног система бројева, пошто су они формално идентични, овај број у бинарном систему бројева се изговара *један нула*. Количина од три куглице, а то је количина која има једну куглицу више у односу на претходно разматрану, се у бинарном систему бројева представља тако што се узме друга цифра из бинарног система бројева а то је цифра 1 и њој се придружи друга цифра из бинарног система бројева, дакле цифра 1, тако да се коначно добије број у бинарном систему бројева 11 што се изговара *један један* а не једанаест као у децималном систему бројева. На овај начин су исцрпљене све могућности комбиновања цифара бинарног система бројева у двоцифрене бинарне бројеве. Количина куглица већа за једну куглицу у односу на претходно разматрану количину, у бинарном систему бројева, се представља тако што се другој цифри овог система бројева тј. јединици придружи два пута прва цифра овог система бројева тј. нула тако да се коначно добије бинарни број 100, што се чита *један нула нула,* а не сто као у децималном систему бројева.

Да би се са сигурношћу знало за неки број да је бинарни број усвојено је писање бинарних бројева на следећи начин: бинарни број се стави у малу заграду а у доњем десном углу ван заграде на месту доњег индекса се напише основа 2 бинарног система бројева. Овај начин писања бинарног броја се илуструје у следећем примеру.

Пример 1.2 $(100)_2$. *Очигледно да је приказани број бинарни број један нула нула.*

Октални систем бројева има такође мањи број цифара од децималног система бројева.

Дефиниција 1.4 *Систем бројева који има осам цифара па према томе чија је основа или база једнака осам је* **октални систем бројева**.

Према већ изложеном принципу за цифре окталног система бројева усваја се првих осам цифара децималног система бројева.

Хексадецимални систем бројева има већи број цифара од децималног система бројева.

Дефиниција 1.5 *Систем бројева који има шеснаест цифара па према томе чија је основа или база једнака шеснаест је* **хексадецимални систем бројева**.

Према већ изложеном принципу за цифре хексадецималног система бројева усвајају се све цифре децималног система бројева допуњене првим великим словима абецеде A, B, C, D, E i F.

Представљање различитих количина елемената неког скупа бројевима окталног или хексадецималног система бројева је потпуно аналогно поступку који је описан за децималне и бинарне бројеве.

Табела 1.3 приказује упоредно првих шеснаест бројева децималног, бинарног, окталног и хексадецималног система бројева тј. у њој се броји у ова четири система бројева до броја који одговара децималном броју 15.

По аналогији са децималним бројевима уопштени запис вишецифреног разломљеног броја основе r је:

$$(a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-m})_r \,. \tag{1.2}$$

где су a_j, $\forall j = -m, \cdots, n$ неке цифре система бројева основе r. Дати број изражава количину која је одређена са:

$$a_n \cdot r^n + a_{n-1} \cdot r^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^1 + a_0 \cdot r^0 + a_{-1} \cdot r^{-1} + \cdots + a_{-m} \cdot r^{-m}. \tag{1.3}$$

Очигледно, свака цифра приказаног броја има и месну вредност која је одговарајући степен основе r.

1.2 Претварања бројева

Могуће је претварање бројева из једног система бројева у други систем бројева, тј. ако имамо број из једног система бројева могуће је извршити претварање у одговарајући број из другог система бројева, тако да оба броја представљају исту количину елемената неког скупа. Тако нпр. је могуће претворити број из бинарног система бројева тј. бинарни број или из окталног система бројева тј. октални број у број из децималног система бројева тј. одговарајући децимални број и обрнуто.

Децимални	Бинарни	Октални	Хексадецимални
0	0000	0	0
1	0001	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3
4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Табела 1.3: Упоредни приказ првих петнаест бројева у децималном, бинарном, окталном и хексадецималном систему бројева

1.2.1 Бинарно децимално и октално децимално претварање

Бинарно децимално и октално децимално претварање се врло једноставно изводи и оно је одређено изразом 1.3. Ради илустрације поступка дају се следећи примери.

Пример 1.3 $(1010,011)_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = (10,375)_{10}$.

Пример 1.4 $(630,4)_8 = 6 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^{-1} = (408,5)_{10}$.

1.2.2 Децимално бинарно и децимално октално претварање

Децимално бинарно и децимално октално претварање, тј. претварање посматраног децималног броја у одговарајући бинарни или октални број, је нешто компликованије него што је био претходно описани поступак, бинарно децималног претварања. Ово претварање је много лакше и једноставније када се изводи посебно за целобројни део и разломљени део посматраног децималног броја. Ово претварање целобројног дела посматраног децималног броја се заснива на узастопном дељењу, основом бинарног система бројева тј. бројем 2, најпре самог целобројног дела децималног броја који се претвара, а потом целобројних количника који су настали у претходном дељењу, све дотле док количник не постане нула. Тражени бинарни еквивалент целобројног дела посматраног децималног броја се формира од остатака који су настали приликом наведених дељења, стим што се остаци ређају у обрнутом редоследу у односу на њихово настајање и то слева на десно, да би се добио тражени бинарни број.

Претварање разломљеног дела посматраног децималног броја се заснива на узастопном множењу, основом бинарног система бројева тј. бројем 2, прво самог разломљеног дела децималног броја који се претвара, а потом разломљених делова производа који су настали у претходном множењу, све дотле док разломљени део производа не постане нула или док се не постигне одређена тачност. Тражени бинарни еквивалент разломљеног дела посматраног децималног броја се формира од целобројних делова производа који су настали приликом наведених множења, стим што се они ређају у редоследу њиховог настајања и то слева на десно иза нуле и зареза, да би се добио тражени разломљени бинарни број. На крају се од целобројног бинарног еквивалента и разломљеног бинарног еквивалента формира одговарајући комплетан бинарни еквивалент.

Овај поступак ће се, ради лакшег разумевања процедуре, илустровати следећим примером.

Пример 1.5 *Потребно је претворити децимални број* $(41,6875)_{10}$ *у одговарајући бинарни број. Прво се целобројни део задатог децималног броја претвара у одговарајући целобројни бинарни еквивалент. Према описаној процедури, прво се* 41 *дели са основом бинарног система бројева, тј. бројем* 2, *при чему се добија целобројни део количника* 20 *и остатак* 1. *Сада се целобројни део количника из управо обављеног дељења дели са* 2 *и добија целобројни део количника* 10 *и остатак* 0. *Тај поступак дељења се наставља све дотле док целобројни део количника не постане нула. Тражени бинарни број се формира од остатака који су настали приликом наведених дељења и то остаци се ређају слева на десно, почев од остатка који је настао при последњем дељењу, узимајући их у супротном смеру у односу на редослед њиховог настајања. Наведена дељења, целобројни количници и остаци тих дељења су приказани у Табели 1.4. Тражени бинарни еквивалент децималног броја* $(41)_{10}$ *је* $(101001)_2$. *Затим се* $0,6875$ *множи са*

Дељења са 2, целобројни количници, остаци
$41 : 2 = 20 + 1,\ a_0 = 1$
$20 : 2 = 10 + 0,\ a_1 = 0$
$10 : 2 = 5 + 0,\ a_2 = 0$
$5 : 2 = 2 + 1,\ a_3 = 1$
$2 : 2 = 1 + 0,\ a_4 = 0$
$1 : 2 = 0 + 1,\ a_5 = 1$

Табела 1.4: Претварање децималног броја $(41)_{10}$ у бинарни еквивалент

основом бинарног система бројева, тј. бројем 2, *при чему се добија целобројни део производа* 1 *и разломљени део производа* $0,3750$. *Сада се разломљени део производа из управо обављеног множења множи са* 2 *и добија целобројни део производа* 0 *и разломљени део производа* $0,7500$. *Тај поступак множења се наставља све дотле док разломљени део производа не* *постане нула. Тражени бинарни број се формира од целобројних делова који су настали приликом наведених множења и то они се ређају слева на десно, почев од целобројног дела који је настао при првом множењу, узимајући их у редоследу њиховог настајања. Наведена множења, целобројни и разломљени делови тих производа су приказани у Табели 1.5. Тражени бинарни еквивалент децималног броја* $(0,6875)_{10}$ *је* $(0,1011)_2$*. Коначно бинарни број*

Множења са 2, целобројни и разломљени производи
$0,6875 \times 2 = 1 + 0,3750,\ a_{-1} = 1$
$0,3750 \times 2 = 0 + 0,7500,\ a_{-2} = 0$
$0,7500 \times 2 = 1 + 0,5000,\ a_{-3} = 1$
$0,5000 \times 2 = 1 + 0,0000,\ a_{-4} = 1$

Табела 1.5: Претварање децималног броја $(0,6875)_{10}$ у бинарни еквивалент

који одговара децималном броју $(41,6875)_{10}$ *је:*

$$(41,6875)_{10} = (a_5a_4a_3a_2a_1a_0, a_{-1}a_{-2}a_{-3}a_{-4})_2 = (101001,1011)_2 . \qquad (1.4)$$

Пример 1.6 *Потребно је претворити децимални број* $(153,513)_{10}$ *у одговарајући октални број. Поступак је сличан као у примеру 1.5 с том разликом што се овде дељење и множење изводи са основом окталног система бројева тј. са бројем осам. Наведена дељења, целобројни количници и остаци као и множења, целобројни и разломљени производи су приказани у табели 1.6. Коначно, комплетан октални број који одговара задатом децималном броју* $(153,513)_{10}$ *је:*

Дељење		Множење	
Цели део	Остаци		
153		$0,513 \times 8 = 4,104$	$\Longrightarrow$са тачношћу од
19	1|	$0,104 \times 8 = 0,832$	од четири цифре
2	3|	$0,832 \times 8 = 6,656$	$(0,4065)_8$
0	2|$\uparrow$ $(231)_8$	$0,656 \times 8 = 5,248$	

Табела 1.6: Претварање децималног броја $(153,513)_{10}$ у одговарајући октални

$$(153,513)_{10} = (231,4065)_8 . \qquad (1.5)$$

Овај пример је илустративан утолико што приликом претварања разломљеног дела задатог децималног броја никада неможе да се добије разломљени део производа да је једнак нули, већ се множење зауставља када се постигне тачност од унапред прописаног броја цифара разломљеног дела траженог окталног броја.

Претварање децималног броја у број основе r је потпуно аналогно приказаном поступку с тим што се дељења и множења изводе са основом r система бројева у који се превођење спроводи.

1.2.3 Бинарно октално (хексадецимално) и октално (хексадецимално) бинарно претварања

Пошто је $8 = 2^3$, тј. основа окталног система бројева 8 је једнака основи бинарног система бројева степенованој бројем три и $16 = 2^4$, тј. основа хексадецималног система бројева 16 је једнака основи бинарног система бројева степенованој бројем четири, свакој цифри окталног односно хексадецималног броја одговарају три односно четири бинарне цифре. Ова чињеница омогућава једноставно бинарно октално односно бинарно хексадецимално и обрнуто претварање. Бинарни број се претвара у одговарајући октални односно хексадецимални тако што се лево и десно од бинарног зареза цифре групишу у групе од по три односно четири а потом се свакој групи придружује, додељује одговарајућа цифра окталног односно хексадецималног система бројева. Обрнути поступак се користи за супротно претварање тј. свакој цифри окталног односно хексадецималног броја се придружује, додељује тробитни односно четворобитни бинарни еквивалент. Изложени поступак илуструје пример бинарно окталног и октално бинарног претварања.

Пример 1.7 *Потребно је задати бинарни број* $10110001101011, 111100000110$ *претворити у одговарајући октални број и задати октални број* $673, 124$ *претворити у одговарајући бинарни број.*

$$\Big(\underbrace{010}_{2}\underbrace{110}_{6}\underbrace{001}_{1}\underbrace{101}_{5}\underbrace{011}_{3},\underbrace{111}_{7}\underbrace{100}_{4}\underbrace{000}_{0}\underbrace{110}_{6}\Big)_2 = (26153,7406)_8$$

$$(\overbrace{6}^{}\;\overbrace{7}^{}\;\overbrace{3}^{},\;\overbrace{1}^{}\;\overbrace{2}^{}\;\overbrace{4}^{})_8 \quad \begin{matrix} \\ 110\;111\;011 \quad 001\;010\;100\end{matrix} = (110111011, 001010100)_2$$

1.3 Аритметика у систему бројева основе r

У систему бројева основе r четири аритметичке операције сабирање, одузимање, множење и дељење се изводе на потпуно аналоган начин као што се то чини у децималном систему бројева. Ове рачунске операције се показују на примерима бинарних бројева.

1.3.1 Сабирање

Да би било могуће изводити аритметичку операцију сабирања у бинарном систему бројева прво се дају основни случајеви сабирања у том систему бројева а то су: $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 10$ и $1 + 1 + 1 = 11$. Извођење поменуте аритметичке операције у бинарном систему бројева се илуструје следећим примером.

Пример 1.8 *При извођењу аритметичке операције* **сабирања** *у бинарном систему бројева, слично као и у децималном систему бројева, сабирци се потписују један испод другог и сабирање се врши по разредима идући с десна* *у лево. Ако је збир цифара при сабирању у неком разреду једноцифрени бинарни број, тј. 0 или 1, онда се тај збир потписује тачно испод цифара разреда у коме се сабирање обавља. Ако је збир цифара при сабирању у неком разреду двоцифрени бинарни број онда се десна цифра тог збира потписује тачно испод цифара разреда у коме се сабирање изводи а лева цифра која је јединица преноси се у наредни разред, тј. третира се као један од сабирака у наредном вишем разреду.*

$$
\begin{array}{rr l}
 & \textit{Сабирање} & \\
 & 101101 & \leftarrow \textit{Сабирак} \\
+ & 100111 & \leftarrow \textit{Сабирак} \\
\hline
 & 1010100 & \leftarrow \textit{Збир}
\end{array}
$$

1.3.2 Одузимање

Да би било могуће изводити аритметичку операцију одузимања у бинарном систему бројева прво се дају основни случајеви одузимања у том систему бројева, а то су: $0-0=0$, $1-0=1$, $1-1=0$, $10-1=1$. Извођење поменуте аритметичке операције у бинарном систему бројева се илуструје следећим примером.

Пример 1.9 *При извођењу аритметичке операције* **одузимања,** *умањеник и умањилац се потписују један испод другог, слично као код децималног система бројева. Одузимање се изводи по разредима идући с десна у лево. При извођењу одузимања у оквиру једног разреда могуће је да је цифра умањеника већа или једнака цифри умањиоца тако да се тада разлика потписује тачно испод цифара тог разреда. Друга могућност је да цифра умањеника буде мања од цифре умањиоца и тада је неопходно да се из првог следећег вишег разреда умањеника позајми јединица тако да се практично врши одузимање цифре умањиоца, а то је цифра* 1*, од бинарног броја* 10*. Позајмљена цифра* 1 *из наредног вишег разреда се мора узети у обзир приликом одузимања у том наредном разреду, тј. та позајмљена цифра* 1 *ће имати улогу још јеног умањиоца.*

$$
\begin{array}{rr l}
 & \textit{Одузимање} & \\
 & 101101 & \leftarrow \textit{Умањеник} \\
- & 100111 & \leftarrow \textit{Умањилац} \\
\hline
 & 000110 & \leftarrow \textit{Разлика}
\end{array}
$$

1.3.3 Множење

Да би било могуће изводити аритметичку операцију множења у бинарном систему бројева прво се дају основни случајеви множења у том систему бројева, а то су: $0\times 0=0$, $0\times 1=1$, $1\times 0=1$, $1\times 1=1$. Извођење поменуте аритметичке операције у бинарном систему бројева се илуструје следећим примером.

Пример 1.10 *При извођењу аритметичке операције* **множења,** *сваком цифром множиоца, идући с десна у лево, множи се множеник и ти производи* *се потписују један испод другог. При томе, сваки наредни производ се помера за једно место улево у одосу на претходни производ. Имајући у виду да су цифре множиоца 0 или 1 то ће поменути производи бити или једнаки множенику или ће бити вишецифрени бинарни бројеви са свим цифрама нула којих има исто онолико колико их има множеник.*

$$
\begin{array}{lr l}
 & \textit{Множење} & \\
 & 1011 & \leftarrow \textit{Множеник} \\
\times & 101 & \leftarrow \textit{Множилац} \\
\hline
 & 1011 & \\
 & 0000 & \\
 & 1011 & \\
\hline
 & 110111 & \leftarrow \textit{Производ}
\end{array}
$$

1.3.4 Дељење

Извођење аритметичке операције дељења у бинарном систему бројева се илуструје следећим примером где се претпоставља да је дељеник већи од делиоца.

Пример 1.11 *При извођењу аритметичке операције* **дељења** *у бинарном систему бројева, слично као у децималном систему бројева, испитује се садржаност делиоца у бинарном броју који се добија од дељеника тако што се узима одређен број цифара дељеника, идући с лева у десно. Кад се изнађе први такав број, прва лева цифра количника се добија као целобројни део количника тог броја и делиоца. Сада се производ делиоца и прве цифре количника одузима од оног дела дељеника у коме је испитивана садржаност делиоца. Добијеној разлици се додаје прва неискоришћена цифра дељеника, па се друга цифра количника добија као целобројни део количника броја насталог на управо описани начин и делиоца. Овај поступак се понавља док се не исцрпи комплетан дељеник.*

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \textit{Дељење} & & \\
\textit{Дељеник} & & \textit{Делилац} & & \textit{Количник} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
1010 & : & 10 & = & 101 \\
10 & & & & \\
\hline
001 & & & & \\
00 & & & & \\
\hline
0010 & & & & \\
10 & & & & \\
\hline
0000 & & & &
\end{array}
$$

1.4 Комплементи

Дефиниција 1.6 *Ако је N је позитиван број основе r чији целобројни део има n цифара, онда је његов $r-$комплемент одређен са:*

$$
r - \textit{комплемент} = \begin{cases} r^n - N, & N \neq 0 \\ 0, & N = 0 \end{cases} . \tag{1.6}
$$

Пример 1.12 10− *комплемент децималног броја* $(25,639)_{10}$ *је* $10^2 - 25,639 = $ $= 74,361$.

Формализован поступак за брзо добијање 10− комплемента децималног броја је: идући с десна у лево преписују се све цифре једнаке нули док се не наиђе на прву цифру различиту од нуле која се одузима од 10 а све наредне цифре се одузимају од 9.

Пример 1.13 2− *комплемент бинарног броја* $(101100)_2$ *је* $2^6 - 101100 = $ $= 1000000 - 101100 = 010100$.

Формализован поступак за брзо добијање 2− комплемента бинарног броја је: идући с десна у лево преписују се све цифре једнаке нули док се не наиђе на прву цифру једнаку 1 која се такође преписује а надаље уместо сваке нуле пише се јединица и обрнуто.

Дефиниција 1.7 *Ако је* N *позитиван број основе* r *чији целобројни део има* n *а разломљени део* m *цифара онда је његов* $(r-1)-$ *комплемент одређен са:*

$$(r-1)- \text{ комплемент} = r^n - r^m - N. \tag{1.7}$$

Пример 1.14 9− *комплемент децималног броја* $(25,639)_{10}$ *је* $10^2 - 10^{-3} -$ $-25,639 = 74,360$.

Формализован поступак за брзо добијање 9− комплемента децималног броја је да се свака његова цифра одузме од броја 9.

Пример 1.15 1− *комплемент бинарног броја* $(101100)_2$ *је* $2^6 - 1 - 101100 = $ $= 111111 - 101100 = 010011$.

Формализован поступак за брзо добијање 1− комплемента бинарног броја је да се свака његова цифра која је 0 замени са 1 и обрнуто свака његова цифра која је 1 замени са 0.

1.4.1 Одузимање помоћу r-комплемента

Директан поступак одузимања двају бројева по систему позајмљивања цифре 1 из вишег разреда када је у претходном разреду цифра умањеника мања од цифре умањиоца, није погодан за остваривање у рачунару.

Поступак одузимања двају позитивних бројева M и N, $(M - N)$, основе r помоћу $r-$ комплемента се састоји у следећем:

1. Сабере се умањеник M са $r-$ комплементом умањиоца N.

2. Испитује се постојање цифре 1 за пренос после сабирања цифара највишег разреда:

   а) ако она постоји, она се одбацује и оно што остане представља тражену разлику.

б) ако она не постоји, тражена разлика је $r-$ комплемент добијене суме са знаком минус.

Пример 1.16 *Применом* $2-$ *комплемента одредити разлику* $M-N$ *целих позитивних бинарних бројева* M *и* N *ако је:*

а) $M = 1010100,\ N = 1000100:$

$$\begin{array}{rcrl}
 & & 1010100 & \\
2-\ \textit{комплемент од } N \rightarrow & & +0111100 & \\
\textit{Цифра за пренос из највишег разреда}\rightarrow & \cancel{1} & 0010000 & \leftarrow \textit{одговор}
\end{array}$$

б) $M = 1000100,\ N = 1010100:$

$$\begin{array}{lrl}
 & 1000100 & \\
 & +0101100 & \leftarrow 2-\ \textit{комплемент од } N \\
\textit{Нема преноса} & 1110000 & \leftarrow \textit{одговор} \\
\textit{Одговор} & -10000 & -(2-\ \textit{комплемент од } 1110000)
\end{array}$$

1.4.2 Одузимање помоћу (r–1)-комплемента

Поступак одузимања двају позитивних бројева M и N, $(M-N)$, основе r помоћу $(r-1)$- комплемента се састоји у следећем:

1. Сабере се умањеник M са $(r-1)$- комплементом умањиоца N.

2. Испитује се постојање цифре 1 за пренос после сабирања цифара највишег разреда:

   а) ако она постоји, она се сабира са цифром најнижег разреда добијене суме и оно што се добије на крају представља тражену разлику.

   б) ако она не постоји, тражена разлика је $(r-1)$- комплемент добијене суме са знаком минус.

Пример 1.17 *Применом* $1-$ *комплемента одредити разлику* $M-N$ *целих позитивних бинарних бројева* M *и* N *ако је:*

а) $M = 1010100,\ N = 1000100:$

$$\begin{array}{rcrl}
 & & 1010100 & \\
1-\ \textit{комплемент од } N \rightarrow & & +0111011 & \\
\textit{Цифра за пренос из највишег разреда}\rightarrow & 1 & 0010000 & \\
 & \hookrightarrow & +1 & \\
 & & \textit{0010000} & \leftarrow \textit{одговор}
\end{array}$$

б) $M = 1000100,\ N = 1010100:$

$$\begin{array}{lrl}
 & 1000100 & \\
 & +0101100 & \leftarrow 1-\ \textit{комплемент од } N \\
\textit{Нема преноса} & 1101111 & \leftarrow \textit{одговор} \\
\textit{Одговор} & -10000 & -(1-\ \textit{комплемент од } 1101111)
\end{array}$$

1.5 Бинарни кôдови

Готово да нема никога ко није чуо или незна шта се подразумева под појмом *дигитални компјутер* или краће *компјутер,* при чему је наведени појам настао од енглеских речи "digit" што значи цифра и "computer" што значи рачунар. Исти појам на нашем језику је *цифарски рачунар* или краће само *рачунар,* при чему се под тим појмом у данашње време обично мисли на персонални, тј лични, рачунар који припада последњој генерацији ових рачунара. Под рачунаром у претходно наведеном смислу подразумева се уређај који аутоматски, превасходно, извршава аритметичке операције тј. рачуна. Отуда се у његовом називу користи реч рачунар. Основна карактеристика овог уређаја је да се у његовој унутрашњости искључиво преносе сигнали[2] који могу да имају само две вредности, два нивоа. Физичка променљива која има улогу сигнала код дигиталних рачунара је напон и тај напон у рачунару може да има само две вредности 0 V и 5 V. Пошто их је само две оне се математички претстављају бинарним цифрама тј. битовима. Низак ниво тј. 0 V се представља бинарном нулом а висок ниво тј. 5 V се представља бинарном јединицом. Следи да се кроз рачунар у својству сигнала једино преносе битови, тј. бинарне цифре, па се отуда у називу овог уређаја користи реч цифарски или дигитални. Претходно описани начин преноса сигнала је карактеристичан и за било који други уређај дигиталног типа, тј. дигитални уређај је шири појам од дигиталног рачунара, тако да је дигитални рачунар уређај који припада групацији дигиталних уређаја. Изумитељи дигиталног рачунара су се одлучили за овакав пренос сигнала кроз рачунар из чисто практичних разлога јер је много једноставније рачунар направити од елемената који имају само два стабилна стања, која имају за последицу само две вредности физичке променљиве, него од елемената који имају више стабилних стања. Као што је добро познато, рачунар оперише не само са бинарним бројевима већ и са децималним бројевима, словима, специјалним знацима и сл. Имајући у виду чињеницу да рачунар преноси само сигнале који су у суштини нуле и јединице, да би рачунар примио, преносио и обрађивао информацију о децималним бројевима, словима и специјалним знацима, неопходно је да они буду исказани, тј. кôдирани, помоћу бинарних цифара 0 и 1, тј. битова. Поставља се питање, колико уређени скуп нула и јединица мора да садржи битова па да се помоћу њега може кôдирати одређени број различитих елемената. Тако, помоћу уређеног скупа нула и јединица од n битова, могуће је кôдирати 2^n различитих елемената, због тога што се скуп од n битова може уредити на 2^n различитих начина. Овде ће бити изложени кôдови помоћу којих се кôдирају децимални бројеви, то су такозвани BCD кôдови, што је скраћеница од енглеског назива за *бинарни код децималних цифара.* Имајући у виду да децималних цифара има укупно десет, BCD кôд мора да буде најмање четворобитни, јер скуп од три бита може да се уреди на $2^3 = 8$ различитих начина што је не-

[2]Под сигналом се подразумева физичка променљива која је носилац одређене информације

довољно за кôдирање десет децималних цифара, тј. тробитни бинарни кôд је недовољан за кôдирање децималних цифара. С друге стране, скуп од четири бита може да се уреди на $2^4 = 16$ различитих начина што значи да приликом четворобитног кôдирања децималних цифара остају и неискоришћени скупови. Ово даје могућност да постоји више различитих BCD кôдова у зависности од тога за којих десет уређених скупова, између шеснаест постојећих, се неко определи. Најпознатији од свих BCD кôдова је 8421 BCD кôд. Постоје кôдови који служе за откривање грешака које настају приликом преноса вишецифрене бинарне информације кроз канал везе. Кôд који за два узастопна дискретна елемента информација која се кôдирају има особину да се само на једној позицији његове цифре разликују је Грејов или Рефлексивни кôд. Кôдови који служе истовремено за кôдирање децималних цифара, слова енглеског алфабета и специјалних знакова се називају *алфанумерички* кôдови. За случај да се при кôдирању слова неким оваквим кôдом не прави разлика између великих и малих слова укупан број елемената (цифре децималног система бројева+слова енглеског алфабета+специјални знаци) које треба кôдирати је 47 тако да алфанумерички кôд мора да буде најмање шестобитни, $2^5 < 47 < 2^6$. У случају прављења разлике између великих и малих слова укупан број знакова које треба кôдирати се још повећава тако да у том случају алфанумерички кôд мора да буде седмобитни или осмобитни. Овде ће бити изложени примери шестобитног, седмобитног и осмобитног алфанумеричког кôда а то су: Interni, ASCII и EBCDIC алфанумерички кôд.

1.5.1 Директни бинарни кôд

Под директним бинарним кôдом децималних бројева подразумева се еквивалентан бинарни број, који се добија на раније описани начин, када се задати децимални број који треба кôдирати у директном бинарном кôду претвори у одговарајући бинарни број.

1.5.2 BCD кôдови

Најпознатији BCD кôдови су приказани у табели 1.7.

Из табеле се види да је, закључно са децималном цифром 9, директни бинарни кôд једнак 8421 BCD кôду. По томе је овај BCD кôд и добио име 8421 BCD кôд, јер директни бинарни кôд, као што се зна, има карактеристику да његове цифре имају поред цифарске вредности и месну вредност. 8, 4, 2, 1 су месне вредности, тј. такозване тежине, цифара овог четворобитног кôда, идући с лева у десно. Због тога овај кôд припада такозваним тежинским кôдовима. Без обзира што BCD кôдова има јако пуно, кад се каже BCD кôд онда се мисли на 8421 BCD кôд. За децималне бројеве веће него што је цифра 9 директни бинарни кôд се разликује од 8421 BCD кôда. Поступак је такав да се свака цифра децималног броја замени са четворобитним 8421 BCD кôдом. Ово је илустровано следећим примером.

Децималне цифре	8421 BCD кôд	+3 кôд	84-2-1 кôд	2421 кôд	5043210 кôд
0	0000	0011	0000	0000	0100001
1	0001	0100	0111	0001	0100010
2	0010	0101	0110	0010	0100100
3	0011	0110	0101	0011	0101000
4	0100	0111	0100	0100	0110000
5	0101	1000	1011	1011	1000001
6	0110	1001	1010	1100	1000010
7	0111	1010	1001	1101	1000100
8	1000	1011	1000	1110	1001000
9	1001	1100	1111	1111	1010000

Табела 1.7: BCD кôдови

Пример 1.18 *Децимални број 98 кôдирати директним бинарним кôдом и* 8421 *BCD кôдом. Решење је приказано у табели 1.8.*

Децимални број	**Директни бинарни кôд**	**8421 BCD кôд**
98	1100010	1001 1000

Табела 1.8: Директни бинарни и 8421 BCD кôд децималног броја 98

+3 BCD кôд добија се тако што се свакој децималној цифри која се кôдира пре кôдирања дода број 3, а онда се добијени резултат претвори у одговарајући бинарни број, тј. директни бинарни кôд. Једино овај кôд од свих BCD кôдова приказаних у табели 1.8 не припада тежинским кôдовима.

За децималне бројеве веће од 9 поступак изражавања у +3 кôду је такав да се свака цифра замени са четворобитним +3 кôдом. Ово је илустровано следећим примером.

Пример 1.19 *Децимални број 98 кôдирати* +3 *кôдом. Решење је приказано у следећој табели:*

Децимални број	**+3 кôд**
98	1100 1011

Табела 1.9: +3 кôд децималног броја 98

Вишецифрени децимални бројеви се кôдирају по сличном принципу и помоћу осталих BCD кôдова који су дати у табели 1.7.

1.5.3 Кôд за откривање грешке

При преносу бинарно кôдиране информације кроз канал везе може доћи до грешке због дејства поремећаја. Коришћењем кôда за откривање грешке омогућава се лако откривање и уочавање грешке али уочена грешка не може да се отклони. Овај кôд има један додатни бит с циљем да се укупан број јединица које су садржане у кôду учини или парним или непарним. Тај додатни бит се ствара у предајнику и то на основу главне бинарне информације која се преноси кроз канал везе а у пријемнику се врши провера укупног броја јединица у кôду и упоређује са оним који је очекиван.

На овај начин је могуће уочавање само непарног броја грешака. У случају учесталих грешака неопходно је интервенисати у смислу откривања узрока настајања грешака и отклањања тог узрока.

1.5.4 Грејов (Рефлексивни) кôд

Грејов кôд има особину да се за два узастопна децимална броја који се кôдирају разликује само на једном месту у једној цифри. Као пример даје се један од више могућих Грејових четворобитних кôдова који је приказан у табели 1.10.

Децимални број	Грејов кôд
0	0000
1	0001
2	0011
3	0010
4	0110
5	0111
6	0101
7	0100
8	1100
9	1101
10	1111
11	1110
12	1010
13	1011
14	1001
15	1000

Табела 1.10: Пример четворобитног Грејовог кôда

Провером у табели 1.10 се лако утврђује да је приказани Грејов кôд за свака два узастопна децимална броја различит само на једној позицији а да су им цифре на свим осталим позицијама једнаке. Могући су и друкчији Грејови кôдови од приказаног, довољно је само да је заступљена наведена особина и да је то један од мноштва Грејових кôдова.

1.5.5 Алфанумерички кôдови

Шестобитни Interni алфанумерички кôд је дат у табели 1.11.

Знак	**Кôд**	**Знак**	**Кôд**	**Знак**	**Кôд**	**Знак**	**Кôд**
A	010 001	M	100 100	Y	111 000		110 000
B	010 010	N	100 101	Z	111 001	•	011 011
C	010 011	O	100 110	0	000 000	(	111 100
D	010 100	P	100 111	1	000 001	+	010 000
E	010 101	Q	101 000	2	000 010	$	101 011
F	010 110	R	101 001	3	000 011	*	101 100
G	010 111	S	110 010	4	000 100	)	011 100
H	011 000	T	110 011	5	000 101	-	100 000
I	011 001	U	110 100	6	000 110	/	110 001
J	100 001	V	110 101	7	000 111	,	111 011
K	100 010	W	110 110	8	001 000	=	001 011
L	100 011	X	110 111	9	001 001		

Табела 1.11: Interni алфанумерички кôд

ASCII алфанумерички кôд је дат у табели 1.12. Овај кôд је од изузетне важности, што потврђује његово често помињање и коришћење у пракси, у вези са применама везаним за персоналне дигиталне рачунаре. Његов назив је скраћеница од оригиналног пуног назива на енглеском језику American Standard Code for Information Interchange што значи амерички стандардни кôд за размену информација.

Знак	**Кôд**	**Знак**	**Кôд**	**Знак**	**Кôд**	**Знак**	**Кôд**
A	100 0001	M	100 1101	Y	101 1001		010 0000
B	100 0001	N	100 1110	Z	101 1010	•	010 1110
C	100 0011	O	100 1111	0	011 0000	(	010 1000
D	100 0100	P	101 0000	1	011 0001	+	010 1011
E	100 0101	Q	101 0001	2	011 0010	$	010 0100
F	100 0110	R	101 0010	3	011 0011	*	010 1010
G	100 0111	S	101 0011	4	011 0100	)	010 1001
H	100 1000	T	101 0100	5	011 0101	-	010 1101
I	100 1001	U	101 0101	6	011 0110	/	010 1111
J	100 1010	V	101 0110	7	011 0111	,	010 1100
K	100 1011	W	101 0111	8	011 1000	=	011 1101
L	100 1100	X	101 1000	9	011 1001		

Табела 1.12: ASCII алфанумерички кôд

Осмобитни EBCDIC алфанумерички кôд је приказан у табели 1.13. Овај назив је скраћеница од пуног оригиналног назива на енглеском језику Extended BCD Interchange code што значи проширени BCD кôд за размену.

Знак	**Кôд**	**Знак**	**Кôд**	**Знак**	**Кôд**	**Знак**	**Кôд**
A	1100 0001	M	1101 0100	Y	1110 1000		0100 0000
B	1100 0010	N	1101 0101	Z	1110 1001	•	0100 1011
C	1100 0011	O	1101 0110	0	1111 0000	(	0100 1101
D	1100 0100	P	1101 0111	1	1111 0001	+	0100 1110
E	1100 0101	Q	1101 1000	2	1111 0010	$	0101 1011
F	1100 0110	R	1101 1001	3	1111 0011	*	0101 1100
G	1100 0111	S	1110 0010	4	1111 0100	)	0101 1101
H	1100 1000	T	1110 0011	5	1111 0101	-	0110 0000
I	1100 1001	U	1110 0100	6	1111 0110	/	0110 0001
J	1101 0001	V	1110 0101	7	1111 0111	,	0110 1011
K	1101 0010	W	1110 0110	8	1111 1000	=	0111 1110
L	1101 0011	X	1110 0111	9	1111 1001		

Табела 1.13: EBCDIC алфанумерички кôд