

Таблица 1: Особине Z - трансформације

| Особине | Дискретна функција | Z-трансформација |
|---|---|---|
| Линеарност | $\alpha_1 x_1(k) + \alpha_2 x_2(k)$ | $\alpha_1 x_1(z) + \alpha_2 x_2(z)$ |
| Транслација дуж временске осе $n \geq 0$ | $x(k+n)$ | $z^n [X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(k)z^{-k}]$ |
| | $x(k-n)$ | $z^{-n} X(z)$ |
| Транслација у s-комплексном домену | $e^{akT} x(kT)$ | $X(e^{aT} z)$ |
| Потоња разлика | $\Delta^n x(k)$ | $(z-1)^n X(z) - z \sum_{i=0}^{n-1} (z-1)^{n-i-1} \Delta^i x(0)$ |
| Претходна разлика | $\nabla^n x(k)$ | $\left(\frac{z-1}{z}\right)^n \cdot X(z)$ |
| Сума | $\tilde{S}(n) = \sum_{k=0}^n x(k)$ | $\frac{z}{z-1} X(z)$ |
| | $S(n) = \sum_{k=0}^{n-1} x(k)$ | $\frac{1}{z-1} X(z)$ |
| Множење с к | $kx(k)$ | $-z \frac{d}{dz} X(z)$ |
| Множење с α^k | $\alpha^k x(k)$ | $X\left(\frac{z}{\alpha}\right)$ |
| Парцијално диференцирање | $\frac{\partial}{\partial \alpha} x(k, \alpha)$ | $\frac{\partial}{\partial \alpha} X(z, \alpha)$ |
| Конволуција | $\sum_{k=0}^i x(k)y(i-k)$ $x(k) = 0, k < 0$ $y(k) = 0, k < 0$ | $X(z)Y(z)$ |
| Производ две функције | $x(k)y(k)$ | $\frac{1}{2\pi j} \oint_c y(p)X(p^{-1}z)p^{-1}dp$ |

Таблица 1: (наставак)

| Особине | Дискретна функција | Z-трансформација |
|---------------------|--|--|
| Перселова теорема | $\sum_{k=0}^{\infty} x^2(k)$ | $= \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)X(z^{-1})z^{-1} dz$ |
| 1. гранична теорема | $x(0)$ | $= \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ |
| 2. гранична теорема | $x(\infty)$ | $= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z)$ |
| | ако су сви полови од $(z - 1)X(z)$ у унутрашњости граничног круга, тј. сви полови осим највише једног од $X(z)$ су у унутрашњости јединичног круга, а један је $z^* = 1$. | |

Таблица 2: Облици z - ликова

| s - комплексни лик $X(s)$ временски непрекидног сигнала | Вредност $x(kT)$ дискретног сигнала $x^* y$ тренутку $t = kT$ | z - лик $X(z)$ |
|--|--|---|
| e^{-iT_s} | $\delta[(k-1)T]$ | z^{-1} |
| $\frac{1}{s}$ | $h(kT)$ | $\frac{z}{z-1}$ |
| $\frac{1}{s+\alpha}$ | $e^{-\alpha kT}$ | $\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$ |
| $\frac{1}{s^2}$ | kT | $\frac{Tz}{(z-1)^2}$ |
| $\frac{1}{s^2(s+\alpha)}$ | $\frac{1}{\alpha^2}(\alpha kT + e^{-\alpha kT} - 1)$ | $\frac{(T/\alpha)z}{(z-1)^2} - \frac{(1-e^{-\alpha T})}{\alpha^2(z-1)(z-e^{-\alpha T})}$ |
| $\frac{\alpha^2}{s(s^2+\alpha^2)}$ | $1 - \cos(\alpha kT)$ | $1 - \cos \alpha T \frac{(1+z)z}{(z-1)(z^2 - 2z \cos \alpha T + 1)}$ |
| $\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$ | $\sin(\alpha kT)$ | $\frac{z \sin \alpha T}{z^2 - 2z \cos \alpha T + 1}$ |
| $\frac{1}{s^3}$ | $\frac{1}{2}(kT)^2$ | $\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$ |
| $\frac{1}{s^4}$ | $\frac{1}{3!}(kT)^3$ | $\frac{T^3 z(z+1)}{2(z-1)^4} + \frac{T^3(z+2)z}{6(z-1)^3} = \frac{1}{3!} \frac{T^3 z(z^2 + 4z + 1)}{(z-1)^4}$ |
| $\frac{1}{s^5}$ | $\frac{1}{4!}(kT)^4$ | $\frac{T^4 z}{24} \cdot \frac{(z^3+1)+11z(z+1)}{(z-1)^5}$ |
| $\frac{1}{s^2(s^2+\alpha^2)}$ | $\frac{1}{\alpha^3}(\alpha kT - \sin \alpha kT)$ | $\frac{Tz}{\alpha^2(z-1)^2} \cdot \frac{z \sin \alpha T}{\alpha^3(z^3 - 2z \cos \alpha T + 1)}$ |

Таблица 2: Облици z - ликова

| s - комплексни лик $X(s)$ временски непрекидног сигнала | Вредност $x(kT)$ дискретног сигнала x^* у тренутку $t = kT$ | z - лик $X(z)$ |
|---|---|--|
| $\frac{1}{(s + \alpha)^2 (s^2 + \beta^2)}$ | $\frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \left\{ \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} \sin(\alpha kT - \psi) + [(\alpha^2 + \beta^2)kT + 2\alpha] e^{-\alpha kT} \right\}$ $\psi = 2 \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}$ | $\frac{2\alpha z}{(\alpha^2 + \beta^2)(z - e^{-\alpha T})} + \frac{T e^{-\alpha T} z}{(\alpha^2 + \beta^2)(z - e^{-\alpha T})^2} + \frac{z[\sin(\beta T + 2\theta) - z \sin 2\theta]}{\beta(\alpha^2 + \beta^2)(z^2 - 2z \cos \beta T + 1)}$ $\theta = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}$ |
| $\frac{1}{(s + \alpha)^m}$ | $\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial \alpha^{m-1}} e^{-\alpha kT}$ | $\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial \alpha^{m-1}} \frac{z}{z - e^{-\alpha T}}$ |
| $\frac{1}{s^m}$ | $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial \alpha^{m-1}} e^{-\alpha kT}$ | $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial \alpha^{m-1}} \frac{z}{z - e^{-\alpha T}}$ |
| $\frac{s}{s^2 + \alpha}$ | $\cos(\alpha kT)$ | $\frac{z(z - \cos \alpha T)}{z^2 - 2z \cos \alpha T + 1}$ |
| $\frac{\alpha}{(s + \alpha)^2 + \alpha^2}$ | $e^{-\alpha kT} \sin(\alpha kT)$ | $\frac{z e^{-\alpha T} \sin \alpha T}{z^2 - 2e^{-\alpha T} z \cos \alpha T + e^{-2\alpha T}}$ |
| | $\frac{1 - e^{-\alpha kT}}{kT}$ | $\alpha + \frac{1}{T} \ln \left(\frac{z - e^{-\alpha T}}{z - 1} \right)$ |
| $\frac{m\pi/T}{s^2 + (m\pi/T)^2}$ | $\sin(km\pi)$ | 0 |
| $\frac{\pi/T}{s^2 + (\pi/T)^2}$ | $\sin(k\pi)$ | 0 |
| $\frac{\pi/T}{(s + \alpha)^2 + (\pi/T)^2}$ | $e^{-\alpha kT} \sin k\pi$ | 0 |
| $\frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_3 s) \dots (1 + \tau_{2m-1} s)}{s^2 (s + \alpha)(1 + \tau_2 s) \dots (1 + \tau_{2m} s)}$ | | $\frac{1}{\alpha} \frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{z}{z-1} \frac{1 - e^{-\alpha T}}{z - e^{-\alpha T}} \cdot \frac{1 - \alpha\tau_1}{1 - \alpha\tau_2} \cdot \dots \cdot \frac{1 - \alpha\tau_{2m-1}}{1 - \alpha\tau_{2m}} -$ $\frac{\tau_2}{\alpha} \frac{z}{z-1} \frac{1 - e^{-T/\tau_2}}{z - e^{-T/\tau_2}} \cdot \frac{1 - \tau_1/\tau_2}{1 - \tau_1/(\alpha\tau_2)} \cdot \dots \cdot \frac{1 - \tau_{2m-1}/\tau_2}{1 - \tau_1/(\alpha\tau_2)} -$ $\frac{T_{2m}}{\alpha} \frac{z}{z-1} \frac{1 - e^{-T/\tau_{2m}}}{z - e^{-T/\tau_{2m}}} \cdot \frac{1 - \tau_1/\tau_{2m}}{1 - 1/(\alpha\tau_{2m})} \cdot \dots \cdot \frac{1 - \tau_{2m-1}/\tau_{2m}}{1 - \tau_{2m-2}/\tau_{2m}}$ |

Таблица 2: Облици z - ликова

| s - комплексни лик $X(s)$ временски непрекидног сигнала | Вредност $x(kT)$ дискретног сигнала x^* у тренутку $t = kT$ | z - лик $X(z)$ |
|---|---|---|
| $\frac{1}{(s^2 - \beta^2)s^2}$ | $\frac{1}{\beta^2} (e^{\beta kT} + e^{-\beta kT} + kT)$ | $\frac{-z}{(2\beta^3)(z - e^{-\beta T})} + \frac{z}{(2\beta^3)(z - e^{\beta T})} - \frac{zT}{\beta^2(z-1)^2}$ |
| $\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + (\pi/T)^2}$ | $e^{-\alpha kT} \cos(k\pi)$ | $\frac{z}{z + e^{-\alpha T}}$ |
| | $\frac{e^{-\alpha kT} - e^{-\beta kT}}{e^{-\alpha T} - e^{-\beta T}}$ | $\frac{z}{(z - e^{-\alpha T})(z - e^{-\beta T})}$ |
| | $\frac{\alpha + \beta}{(1 - \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{[(\alpha + \beta\gamma)^2 + (\beta\delta)^2]^{1/2}}{\delta[(\gamma - 1)^2 + \delta^2]^{1/2}} \cdot (\delta^2 + \gamma^2)^{1/2} \sin(k\theta + \psi + \lambda)$ | $\frac{z(\gamma + \delta z)}{[(z - \gamma)^2 + \delta^2](z - 1)}$ |
| | $\theta = \arctg \frac{\delta}{\gamma}, \psi = -\arctg \frac{\delta}{\gamma - 1}, \lambda = \arctg \frac{\beta\gamma}{\alpha + \beta\gamma}$ | |
| | $\frac{\gamma^k}{(\gamma - \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{1}{\beta[(\alpha - \gamma)^2 + \beta^2]^{1/2}} \cdot (\alpha^2 + \beta^2)^{k/2} \sin(k\theta + \psi)$ | $\frac{z}{(z - \gamma)[(z - \alpha)^2 + \beta^2]}$ |
| | $\theta = \arctg \frac{\beta}{\alpha}, \psi = \arctg \frac{\beta}{\alpha - \gamma}$ | |
| | $\frac{\gamma}{(\gamma - 1)^2} + \frac{k}{1 - \gamma} - \frac{1}{(1 - \gamma)^2}$ | $\frac{z}{(z - \gamma)(z - 1)^2}$ |
| | $\frac{1}{(1 - \gamma)[(1 - \alpha)^2 + \beta^2]} + \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^{k/2} \sin(k\theta + \psi + \lambda)}{\beta[(\alpha - \gamma)^2 + \beta^2]^{1/2}[(\alpha - 1)^2 + \beta^2]^{1/2}} +$ | $\frac{z}{(z - 1)(z - \gamma)[(z - \alpha)^2 + \beta^2]}$ |
| | $+\frac{\gamma^k}{(\gamma - 1)[(\gamma - \alpha)^2 + \beta^2]}$ | |
| | $\theta = \arctg \frac{\beta}{\alpha}, \psi = -\arctg \frac{\beta}{\alpha - 1}, \lambda = -\arctg \frac{\beta}{\alpha - \gamma}$ | |
| | $\frac{1 + a_0}{(1 - \gamma)[(1 - \alpha)^2 + \beta^2]} + \frac{(\gamma + a_0)\gamma^n}{(\gamma - 1)[(\gamma - \alpha)^2 + \beta^2]} +$ | $\frac{z(z + a_0)}{(z - 1)(z - \gamma)[(z - \alpha)^2 + \beta^2]}$ |
| | $+\frac{(\alpha^2 + \beta^2)^{k/2} [(a_0 + \alpha)^2 + \beta^2]^{1/2}}{\beta[(\alpha - 1)^2 + \beta^2]^{1/2}[(\alpha - \gamma)^2 + \beta^2]^{1/2}} \cdot \sin(k\theta + \psi + \lambda)$ | |
| | $\theta = \arctg \frac{\beta}{\alpha}, \psi = -\arctg \frac{\beta}{\alpha - 1} - \arctg \frac{\beta}{\alpha - \gamma}, \lambda = \arctg \frac{\beta}{a_0 + \alpha}$ | |

Таблица 2: Облици z - ликова

| s - комплексни лик $X(s)$ временски непрекидног сигнала | Вредност $x(kT)$ дискретног сигнала x^* у тренутку $t = kT$ | z - лик $X(z)$ |
|---|---|---|
| | $\frac{\gamma + a_0}{(\gamma - 1)^2} \gamma^k + \frac{1 + a_0}{1 - \gamma} k + \frac{1}{1 - \gamma} - \frac{a_0 + 1}{(1 - \gamma)^2}$ | $\frac{z(z + a_0)}{(z - \gamma)(z - 1)^2}$ |
| | $\frac{k\gamma^{k-1}}{(\gamma - 1)^3} - \frac{3\gamma^k}{(\gamma - 1)^4} + \frac{1}{2} \left[\frac{k(k-1)}{(1-\gamma)^2} - \frac{4k}{(1-\gamma)^3} + \frac{6}{(1-\gamma)^4} \right]$ | $\frac{z}{(z - \gamma)^2(z - 1)^3}$ |
| | $\frac{(\gamma + a_0)k\gamma^{k-1} + \gamma^k}{(\gamma - 1)^2} - \frac{2\gamma^k(\gamma + a_0)}{(\gamma - 1)^3}$ | $\frac{z(z + a_0)}{(z - \gamma)^2(z - 1)^2}$ |
| | $\alpha^{kT} \cos(k\pi T)$ | $\frac{z}{z + \alpha}$ |
| | $e^{-\alpha kT} \cos(k\pi T)$ | $\frac{z}{z + e^{-\alpha T}}$ |
| $\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$ | $e^{-\alpha kT} \cos(k\omega T)$ | $\frac{z^2 - ze^{-\alpha T} \cos \omega T}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \omega T + e^{-2\alpha T}}$ |
| $\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$ | $e^{-\alpha kT} \sin(k\omega T)$ | $\frac{e^{-\alpha T} \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \omega T + e^{-2\alpha T}}$ |
| | α^{kT} | $\frac{z}{z - \alpha}$ |
| | $\frac{\alpha^{kT}}{k!}$ | $e^{\alpha/z}$ |
| | $kT\alpha^{(k-1)T}$ | $\frac{z}{(z - \alpha)^2}$ |
| | $(kT)^2 \alpha^{(k-1)T}$ | $\frac{z(z + \alpha)}{(z - \alpha)^3}$ |
| | $(kT)^3 \alpha^{(k-1)T}$ | $\frac{z(z^2 + 4\alpha z + \alpha^2)}{(z - \alpha)^4}$ |
| $\frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}$ | $sh(\alpha kT)$ | $\frac{zsh\alpha}{z^2 - 2z \cdot ch\alpha + 1}$ |

Таблица 2: Облици z - ликова

| s - комплексни лик $X(s)$ временски непрекидног сигнала | Вредност $x(kT)$ дискретног сигнала x^* у тренутку $t = kT$ | z - лик $X(z)$ |
|---|--|--|
| $\frac{\alpha s}{s^2 - \alpha^2}$ | $ch(\alpha kT)$ | $\frac{z^2 - z \cdot ch \alpha}{z^2 - 2z \cdot ch \alpha + 1}$ |
| | $\beta^{kT} \sin(\alpha kT)$ | $\frac{\beta z \sin \alpha}{z^2 - 2\beta z \cos \alpha + \beta^2}$ |
| | $\binom{k+i}{i} \alpha^{kT}$ | $\left(\frac{z}{z-\alpha}\right)^{i+1}$ |
| | $\left(\frac{1}{\alpha^{i-1}}\right) \binom{k}{i-1} \alpha^{kT}$ | $\frac{z}{(z-\alpha)^i}$ |
| | $\binom{\beta}{k} \gamma^{kT} \alpha^{\beta-1}$ | $\left(\frac{\alpha z + \gamma}{z}\right)^\beta$ |
| | $\frac{\alpha^{kT}}{k}$ | $\ln \frac{z}{z-\alpha}$ |
| | $\frac{(\ln \alpha)^{kT}}{k!}$ | $\alpha^{1/z}$ |