Поглавље 10

Критеријуми стабилности, управљивост, осмотривост

10.1 Алгебарски критеријуми стабилности

Посматра се систем:

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{x}_u(k) \tag{10.1}$$

$$\mathbf{x}_i(k) = C\mathbf{x}(k) + D\mathbf{x}_u(k). \tag{10.2}$$

Нека је карактеристични полином система 10.1 10.2 (матрице A система 10.1 10.2):

$$f(z) = \det(z\mathbf{I} - A) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i,\ a_n = 1.$$

10.1.1 Шур-Конов критеријум

Шур-Конови минори Δ_k реда $2k \times 2k$ одређени су са:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & | & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_{n-k+3} & a_{n-k+2} & a_{n-k+1} \\ a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & | & 0 & a_n & \cdots & a_{n-k+4} & a_{n-k+3} & a_{n-k+2} \\ & & & \vdots & & & | & & & \vdots & & & \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & \cdots & a_1 & a_0 & | & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & | & a_0 & a_1 & \cdots & a_{k-3} & a_{k-2} & a_{k-1} \\ a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & | & 0 & a_0 & \cdots & a_{k-4} & a_{k-3} & a_{k-2} \\ & & & \vdots & & & | & & & \vdots & & & \\ a_{n-k+1} & a_{n-k+2} & a_{n-k+3} & \cdots & a_{n-1} & a_n & | & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix}$$

Теорема 10.1 *Да би систем 10.1 10.2 био стабилан потребно је и довољно да минори Δ_k задовољавају следећи услов:*

$$(-1)^k \Delta_k > 0, \forall k = 1, 2, \cdots, n.$$

Претходна теорема исказује Шур-Конов критеријум.

10.1.2 Марден-Џаријев критеријум

Марден-Џаријев критеријум се заснива на следећој шеми:

ред	коефицијенти						
1	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
2	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
3	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	$\cdots$	b_2	b_1	$-$
4	b_1	b_2	b_3	$\cdots$	b_{n-1}	b_n	$-$
5	c_n	c_{n-1}	c_{n-2}	$\cdots$	c_2	$-$	
6	c_2	c_3	c_4	$\cdots$	c_n	$-$	
$\vdots$							
$2n-3$	s_n	s_{n-1}	s_{n-2}	$-$			

Парни редови ове шеме се добијају кад се коефицијенти претходног реда испишу обрнутим редоследом.

$$b_n = \begin{vmatrix} a_n & a_0 \\ a_0 & a_n \end{vmatrix}; b_{n-1} = \begin{vmatrix} a_n & a_1 \\ a_0 & a_{n-1} \end{vmatrix}; \cdots, b_1 = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix}$$

$$c_n = \begin{vmatrix} b_n & b_1 \\ b_1 & b_n \end{vmatrix}; c_{n-1} = \begin{vmatrix} b_n & b_2 \\ b_1 & b_{n-1} \end{vmatrix}; \cdots, c_2 = \begin{vmatrix} b_n & b_{n-1} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Шема се завршава непарним редом са три члана.

Теорема 10.2 *Да би систем 10.1 10.2 био стабилан потребно је и довољно да буду испуњени следећи услови:*

1.

$$f(1) > 0 \text{ и } (-1)^n f(-1) > 0,$$

2.

$$a_n = 1 > |a_0|$$
$$|b_n| > |b_1|$$
$$|c_n| > |c_2|$$
$$\vdots$$
$$|s_n| > |s_{n-2}|.$$

10.2 Графоаналитички критеријуми

10.2.1 Z-модификовани Најквистов критеријум

- Посматра се дискретни систем аутоматског регулисања са једном излазном, регулисаном величином при чему је његова $z-$преносна функција у односу на задату вредност регулисане величине:

  $$W(z) = \frac{W_1(z)}{1 + W_{ok}(z)}$$

  где је $W_{ok}(z)$ $z-$преносна фукција отвореног кола. Нека је:

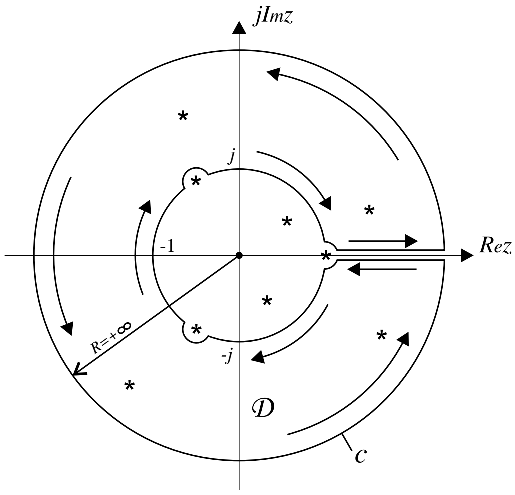
  $$T(z) = 1 + W_{ok}(z)$$

  тако да

  $$T(z) = 0$$

  одређује карактеристичну једначину целог система.

  На слици 10.1 приказана је контура C која обухвата домен $\mathcal{D}$. Контура C се састоји из:



Слика 10.1: Контура C која обухвата домен $\mathcal{D}$

- Делова јединичне кружнице (нису укључене тачке у којима су полови $z-$преносне функције $W_{ok}(z)$ јединичног модула)

- Полукружница произвољно малог полупречника ε с центром у половима од $W_{ok}(z)$ јединичног модула, тако да су ти полови ван $\mathcal{D}$

- Интервала $]+1,+\infty[$ реалне осе

- И кружнице полупречника $R=+\infty$.

Смер кретања тачке z дуж контуре C је позитиван $\Longleftrightarrow$ домен $\mathcal{D}$ при томе остаје с леве стране контуре C.

Нека је P број полова од $W_{ok}(z)$ који се налазе у домену $\mathcal{D}$.

Нека је N број нула од $T(z)$ које се налазе у домену $\mathcal{D}$ и на његовој граници. Посматрани систем САР је стабилан једино ако је $N=0$.

На основу Кошијеве теореме следи да је промена аргумента од $T(z)$ која је изазвана једним обиласком тачке z око домена $\mathcal{D}$ дуж контуре C у позитивном смеру једнака $(N-P)\,2\pi \Longrightarrow$ да је посматрани систем стабилан једино ако је та промена аргумента од $T(z)$ једнака $-2\pi P$. На тај начин је исказан имплицитно $Z-$модификовани Најквистов критеријум.

Теорема 10.3 *Нека је P укупан број полова $z-$преносне функције $W_{ok}(z)$ отвореног кола система регулисања, у домену $\mathcal{D}$. Да би тај систем регулисања био стабилан потребно је и довољно да при једном обиласку тачке z око домена $\mathcal{D}$ дуж контуре C у позитивном смеру, ходограф $W_{ok}(z)$ у равни W_{ok} обухвати тачку $(-1,j0)$ тачно P пута у негативном математичком смеру и да ни једанпут не прође кроз њу.*

10.3 Управљивост дискретних система

Посматра се систем описан са:

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k) \tag{10.3}$$

$$\mathbf{x}_i(k) = C\mathbf{x}(k) + D\mathbf{u}(k). \tag{10.4}$$

Овде вектор улаза претставља вектор управљања $\mathbf{u}$.

Дефиниција 10.4 *Стање $\mathbf{x}_0$ система 10.3 10.4 је управљиво $\Longleftrightarrow$ постоје цео број $K \geq 0$ и управљање $\mathbf{u}$ чије су вредности дефинисане у тренуцима 0, T, $2T$, $\cdots$, $(K-1)\,T$ тако да важи:*

$$\boldsymbol{\chi}\left(k; \mathbf{x}_0; \mathbf{u}_{[0,K-1]}\right) = \mathbf{0}_x.$$

Дефиниција 10.5 *Систем 10.3 10.4 је комплетно управљив или краће управљив $\Longleftrightarrow$ постоји природан број K и за свако његово почетно стање $\mathbf{x}_0 \in \Re^n$ постоје дефинисани вектори $\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \cdots, \mathbf{u}(K-1)$ такви да је:*

$$\boldsymbol{\chi}\left(k; \mathbf{x}_0; \mathbf{u}_{[0,K-1]}\right) = \mathbf{0}_x.$$

Теорема 10.6 *Ако је матрица A несингуларна онда да би систем 10.3 10.4 био управљив потребно је и довољно да ранг матрице*

$$U = \begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = n.$$

10.4 Осмотривост дискретних система

Дефиниција 10.7 *Стање $\mathbf{x}_0$ система 10.1 10.2 је осмотриво $\Longleftrightarrow$ постоји цео број $K \geq 0$ такав да је оно једнозначно одређено векторима $\mathbf{x}_i(0)$, $\mathbf{x}_i(1)$, $\cdots$, $\mathbf{x}_i(K)$ и $\mathbf{x}_u(0)$, $\mathbf{x}_u(1)$, $\cdots$, $\mathbf{x}_u(K)$.*

Ако се уведе помоћна величина

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_i - D\mathbf{x}_u$$

што на основу једначине излаза повлачи

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x}(k)$$

и што показује да је за анализу осмотривости свеједно да ли се систем 10.1 10.2 посматра у слободно или принудном радном режиму.

Дефиниција 10.8 *Стање $\mathbf{x}_0 \in \Re^n$ система 10.1 10.2 је осмотриво $\Longleftrightarrow$ постоји цео број $K \geq 0$ такав да је оно једнозначно одређено векторима $\mathbf{x}_i(0)$, $\mathbf{x}_i(1)$, $\cdots$, $\mathbf{x}_i(K)$ у слободном радном режиму.*

Дефиниција 10.9 *Систем 10.1 10.2 је комплетно осмотрив или краће осмотрив* $\Longleftrightarrow$ *постоји природан број* K *такав да је свако његово стање* $\mathbf{x}_0 \in \Re^n$ *једнозначно одређено његовим одзивом* $\boldsymbol{\chi}_i\left(k;\mathbf{x}_0;\mathbf{0}_u\right)$ *у тренуцима* kT, $k = 1, 2, \cdots, K$ *у слободном радном режиму.*

Теорема 10.10 *Ако је матрица* A *регуларна онда да би систем 10.1 10.2 био осмотрив потребно је и довољно да ранг матрице*

$$S = \begin{pmatrix} C^T & A^T C^T & \cdots & \left(A^T\right)^{n-1} C^T \end{pmatrix} = n.$$