## Поглавље 9

# Концепт стања

## 9.1 Концепт стања, величине стања, простор стања и једначина стања Дискретног САУ

**Дефиниција 9.1 Стање дискретног физичког система** *у тренутку одабирања $t = kT$ је она његова унутрашња ситуација у том тренутку чије је познавање, заједно са познавањем вредности улаза у том и у следећим тренуцима одабирања $kT, (k+1)T, \cdots, NT, \cdots$ неопходно и довољно да се једнозначно одреди вредност излаза тог система у тренуцима $kT, (k+1)T, \cdots, NT, \cdots$ као и сама унутрашња ситуација истог система у тим тренуцима одабирања.*

Дискретан физички систем је **Дискретан динамички физички систем** $\Longleftrightarrow$ има дефинисано стање у сваком тренутку одабирања.

**Дефиниција 9.2 Стање апострактног дискретног система** *у тренутку одабирања $t = kT$ је скуп најмањег броја информација о том систему у том тренутку чије познавање, заједно са познавањем вредности улаза у том и у следећим тренуцима одабирања $kT, (k+1)T, \cdots, NT, \cdots$ једнозначно одређује вредност излаза тог система као и тај скуп информација у истим тренуцима одабирања $kT, (k+1)T, \cdots, NT, \cdots$.*

Између стања Дискретног физичког система и стања одговарајућег апстрактног дискретног система је обострано једнозначна коресподенција.

**Дефиниција 9.3** *Најмањи број линеарно независних величина чије вредности у сваком тренутку одабирања $kT$ једнозначно одређују стање система у истом тренутку је* **димензија (ред)** *система а саме те величине су величине стања и означавају се са $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Њихове вредности у тренутку одабирања $t = kT$ су $x_1(k), x_2(k), \cdots, x_n(k)$.*

**Дефиниција 9.4** *Вектор $\mathbf{x} \in \Re^n$ чији су елементи величине стања дискретног система,*

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$$

*је вектор стања дискретног система, а $\mathbf{x}(k)$ је његова вредност у тренутку одабирања $t = kT$.*

Вредност вектора стања $\mathbf{x}$ дискретног система у тренутку одабирања $t = kT$ је одређена вредношћу његове **функције прелаза стања (кретања система)** у том истом тренутку:

$$\mathbf{x}(k) = \boldsymbol{\chi}\left(k; k_0; \mathbf{x}_0; \mathbf{x}_{u[k_0, k-1]}\right) \tag{9.1}$$

где:

$k_0$ означава почетни тренутак $k_0T$
$\mathbf{x}_0$ је почетни вектор стања у почетном тренутку одабирања $k_0T$.

Такође:

$$\mathbf{x}_{u[k_0, k-1]} = \mathbf{x}_u(k_0), \mathbf{x}_u(k_0+1), \cdots, \mathbf{x}_u(k-1).$$

Релација 9.1 $\Longrightarrow$

$$\boldsymbol{\chi}\left(k; k_0; \mathbf{x}_0; \mathbf{x}_{u[k_0,k-1]}\right) \equiv \mathbf{x}_0.$$

Промена стања Дискретног система је описана дискретном једначином која се назива **дискретна једначина стања** а чији је Кошијев облик као што следи:

$$\mathbf{x}\left(k+1\right) = A\mathbf{x}\left(k\right) + B\mathbf{x}_u\left(k\right).$$

Решење горње дискретне једначине стања које задовољава претходни почетни услов зове се решење система и оно очигледно представља функцију прелаза стања.

Користи се следећа ознака:

$$\widehat{\mathbf{x}}_u\left(k\right) = \mathbf{x}_u\left(k+i\right).$$

**Дефиниција 9.5** *Дискретан динамички систем је стационаран* $\Longleftrightarrow$ *поседује следеће особине:*

1. *Почетни тренутак одабирања* $t_0 = k_0 T$ *нема утицаја на кретање тог система:*

$$\boldsymbol{\chi}\left[\left(k-i\right); k_0 - i; \mathbf{x}_0; \widehat{\mathbf{x}}_{u[k_0-i,k-i-1]}\right] \equiv \boldsymbol{\chi}\left(k; k_0; \mathbf{x}_0; \mathbf{x}_{u[k_0,k-1]}\right).$$

2. *Функција излаза не зависи експлицитно од времена:*

$$\mathbf{x}_i\left(k\right) = \boldsymbol{\chi}_i\left[\mathbf{x}\left(k\right); \mathbf{x}_u\left(k\right)\right].$$

Надаље ће се третирати само стационарни дискретни динамички системи. Пошто за њих избор почетног тренутка нема значаја усваја се да је $k_0 = 0 \Longrightarrow$

$$\boldsymbol{\chi}\left(k; k_0; \mathbf{x}_0; \mathbf{x}_u\right) \equiv \boldsymbol{\chi}\left(k; \mathbf{x}_0; \mathbf{x}_u\right) \equiv \boldsymbol{\chi}\left(k; 0; \mathbf{x}_0; \mathbf{x}_{u[0,k-1]}\right).$$

**Дефиниција 9.6** *Стационаран дискретан динамички систем је* **линеаран** $\Leftrightarrow$ *за њега важи закон суперпозиције:*

1. *Његова функција прелаза стања је линеарна и по почетном стању и по улазу:*

$$\boldsymbol{\chi}\left(k; \alpha_1\mathbf{x}_{01} + \alpha_2\mathbf{x}_{02}; \alpha_1\mathbf{x}_{u1} + \alpha_2\mathbf{x}_{u2}\right) \equiv \alpha_1\boldsymbol{\chi}\left(k; \mathbf{x}_{01}; \mathbf{x}_{u1}\right) + \alpha_2\boldsymbol{\chi}\left(k; \mathbf{x}_{02}; \mathbf{x}_{u2}\right).$$

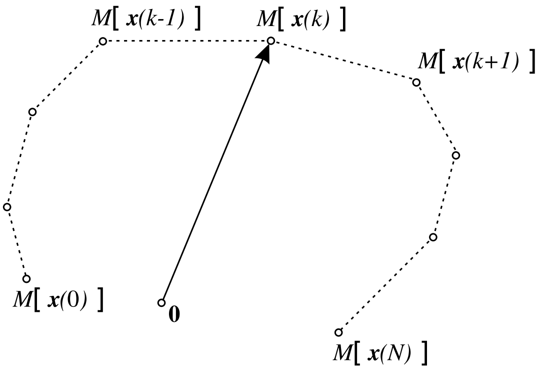
2. *Његова функција излаза* $\boldsymbol{\chi}_i$ *је линеарна и по стању и по улазу:*

$$\boldsymbol{\chi}_i\left(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2; \alpha_1\mathbf{x}_{u1} + \alpha_2\mathbf{x}_{u2}\right) \equiv \alpha_1\boldsymbol{\chi}_i\left(\mathbf{x}_1; \mathbf{x}_{u1}\right) + \alpha_2\boldsymbol{\chi}_i\left(\mathbf{x}_2; \mathbf{x}_{u2}\right).$$

Надаље ће се проучавати само линеарни стационарни дискретни динамички системи.

У сваком тренутку одабирања стање система је представљено тачком $M$ у простору стања чији је вектор положаја тренутна вредност вектора стања $\mathbf{x}\left(k\right)$.

Геометријско место свих положаја радне тачке $M\left[\mathbf{x}\left(k\right)\right]$ у простору стања за све целе вредности броја $k$ је **дискретна трајекторија стања** $\mathcal{T}_d$ дискретног система. На слици 9.1 приказана је једна произвољна трајекторија стања дискретног система.




Слика 9.1: Дискретна трајекторија дискретног система

### 9.1.1 Избор величина стања система на основу дискретне једначине понашања

Посматра се једноструко преносни дискретни систем чија је дискретна једначина понашања:

$$a_n x_i(k+n) + a_{n-1} x_i(k+n-1) + \cdots + a_1 x_i(k+1) + a_0 x_i(k) =$$

$$= b_0 x_u(k) + b_1 x_u(k+1) + \cdots + b_m x_u(k+m), \quad m \leq n.$$

Избор величина стања се врши на потпуно аналоган начин као код континуалних САУ са одговарајућом диференцијалном једначином понашања. Као резултат избора величина стања добија се векторска дискретна једначина стања и векторска дискретна једначина излаза:

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + \mathbf{b} x_u(k)$$

$$x_i(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k) + d x_u(k)$$

где су:

$$A \in \Re^{n \times n}, \mathbf{b} \in \Re^n, \mathbf{c} \in \Re^n, d \in R.$$

**Први општи алгоритам:**

$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ -a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_{n-1} - a_{n-1} b_n \\ b_{n-2} - a_{n-2} b_n \\ \vdots \\ b_0 - a_0 b_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; d = b_n$$

**Други општи алгоритам:**

$$A = P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n \\ b_1 - a_1 b_n \\ \vdots \\ b_{n-2} - a_{n-2} b_n \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix}; d = b_n.$$

Први општи алгоритам се може користити и у случају вишеструко преносног система са једном излазном величином и више улазних величина. Поступак је такав да се за сваку улазну величину $x_{uj}$, $j = 1, 2, \cdots, M$ одреди одговарајући вектор $\mathbf{b}_j$ који сачињавају матрицу $B$:

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{x}_u(k)$$

$$x_i(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k) + \mathbf{d}^T \mathbf{x}_u(k)$$

где је:

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_M \end{bmatrix}; \mathbf{b}_j = \begin{bmatrix} b_{j,n-1} - a_{n-1} b_{j,n} \\ b_{j,n-2} - a_{n-2} b_{j,n} \\ \vdots \\ b_{j,0} - a_0 b_{j,n} \end{bmatrix}, \forall j = 1, \cdots, M$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} b_{1,n} & b_{2,n} & \cdots & b_{M,n} \end{bmatrix}^T.$$

У општем случају вишеструкопреносног система се добија:

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{x}_u(k)$$

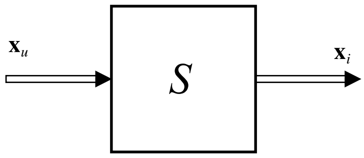
$$\mathbf{x}_i(k) = C\mathbf{x}(k) + D\mathbf{x}_u(k)$$

где је:

$$A \in \Re^{n\times n}, B \in \Re^{n\,\times\,M}, C \in \Re^{N\,\times\,n}, D \in R^{N\,\times\,M}.$$

### 9.1.2 Дискретизација диференцијалне векторске једначине стања и једначине излаза временски непрекидног вишеструко преносног система једино са одскочним променама улазних величина и то у дискретним тренуцима одабирања

На слици 9.2 приказан је дијаграм линеарног стационарног временски непрекидног вишеструко преносног система $S$.



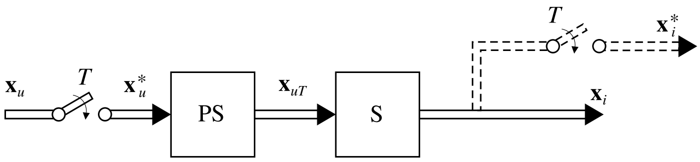

Слика 9.2: Дијаграм линеарног стационарног временски непрекидног вишеструко преносног система $S$

Векторска диференцијална једначина стања и векторска једначина излаза система са слике 9.2 су:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \widehat{A}\mathbf{x}+\widehat{B}\mathbf{x}_u$$

$$\mathbf{x}_i = \widehat{C}\mathbf{x}+\widehat{D}\mathbf{x}_u.$$

На слици 9.3 је приказан исти систем $S$ као на слици 9.2 коме у редној спрези предходе систем идеалних одабирача и систем продуживача трајања сигнала нултог реда.




Слика 9.3: Редна веза система идеалних одабирача, система продуживача сигнала нултог реда, система $S$ са слике 9.2 и система фиктивних идеалних одабирача

Сада једначина стања и једначина излаза система $S$ добија нови облик као што следи:

$$\frac{d\mathbf{x}\,(t)}{dt} = \widehat{A}\mathbf{x}\,(t) + \widehat{B}\mathbf{x}_{uT}\,(t) \tag{9.2}$$

$$\mathbf{x}_i\,(t) = \widehat{C}\mathbf{x}\,(t) + \widehat{D}\mathbf{x}_{uT}\,(t) \tag{9.3}$$

при чему је:

$$\mathbf{x}_{uT}\,(t) = \mathbf{x}_u\,(kT)\,\{h\,(t-kT)\} - h\,[t-(k+1)\,T]\,,\ \forall t \in [kT,(k+1)\,T[\,,$$

$$\forall k = 0,1,2,3$$

**Дискретизација једначина 9.2 и 9.3**

Кретање система 9.2 и 9.3 је:

$$\widehat{\boldsymbol{\chi}}\left(t;0;\mathbf{x}_0;\mathbf{x}_{uT[0,T]}\right) = e^{\widehat{A}t}\mathbf{x}_0 + e^{\widehat{A}t}\int\limits_0^t e^{-\widehat{A}\tau}\widehat{B}\mathbf{x}_{uT}\,(\tau)\,d\tau. \tag{9.4}$$

На основу особине узрочности кретања следи:

$$\widehat{\boldsymbol{\chi}}\left[(k+1)T;kT;\mathbf{x}(kT);\mathbf{x}_{uT[kT,(k+1)T]}\right] \equiv$$
$$\equiv \widehat{\boldsymbol{\chi}}\left[(k+1)T;0;\mathbf{x}_0;\mathbf{x}_{uT[0,(k+1)T]}\right]. \tag{9.5}$$

На основу особине стационарности следи:

$$\widehat{\boldsymbol{\chi}}\left[(k+1)T;kT;\mathbf{x}(kT);\mathbf{x}_{uT[kT,(k+1)T]}\right] \equiv \widehat{\boldsymbol{\chi}}\left[T;0;\widetilde{\mathbf{x}}_0;\widetilde{\mathbf{x}}_{uT[0,T]}\right] \tag{9.6}$$

где је:

$$\widetilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}(kT)$$
$$\widetilde{\mathbf{x}}_{uT[0,T]} = \mathbf{x}_{uT[kT,(k+1)T]} \equiv \mathbf{x}_u(kT). \tag{9.7}$$

На основу 9.4 уз уважавање 9.7 десна страна релације 9.6 је:

$$\widehat{\boldsymbol{\chi}}\left[T;0;\widetilde{\mathbf{x}}_0;\widetilde{\mathbf{x}}_{uT[0,T]}\right] = e^{\widehat{A}T}\widetilde{\mathbf{x}}_0 + e^{\widehat{A}T}\int\limits_0^T e^{-\widehat{A}\tau}\widehat{B}\widetilde{\mathbf{x}}_{uT}(\tau)\,d\tau =$$
$$= e^{\widehat{A}T}\mathbf{x}(kT) + \left\{e^{\widehat{A}T}\left[\int\limits_0^T e^{-\widehat{A}\tau}d\tau\right]\widehat{B}\right\}\mathbf{x}_u(kT). \tag{9.8}$$

На основу 9.8 и 9.6 следи:

$$\widehat{\boldsymbol{\chi}}\left[(k+1)T;kT;\mathbf{x}(kT);\mathbf{x}_{uT[kT,(k+1)T]}\right] =$$
$$= e^{\widehat{A}T}\mathbf{x}(kT) + \left\{e^{\widehat{A}T}\left[\int\limits_0^T e^{-\widehat{A}\tau}d\tau\right]\widehat{B}\right\}\mathbf{x}_u(kT). \tag{9.9}$$

Узимајући у обзир 9.5 израз 9.9 постаје:

$$\widehat{\boldsymbol{\chi}}\left[(k+1)T;0;\mathbf{x}_0;\mathbf{x}_{uT[0,(k+1)T]}\right] = \mathbf{x}\left[(k+1)T\right] =$$
$$= e^{\widehat{A}T}\mathbf{x}(kT) + \left\{e^{\widehat{A}T}\left[\int\limits_0^T e^{-\widehat{A}\tau}d\tau\right]\widehat{B}\right\}\mathbf{x}_u(kT). \tag{9.10}$$

Уводе се ознаке:

$$A = e^{\widehat{A}T};\ B = A\left[\int\limits_0^T e^{-\widehat{A}\tau}d\tau\right]\widehat{B}.$$

Са новим ознакама 9.10 постаје:

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{x}_u(k). \tag{9.11}$$

Једначина 9.11 је **векторска дискретна једначина стања** на $\mathcal{T}_{d_0}$. **Дискретна једначина излаза** добија се директно:

$$\mathbf{x}_i(k) = C\mathbf{x}(k) + D\mathbf{x}_u(k)$$

где је:

$$C = \widehat{C},\ D = \widehat{D}.$$

Ово су тачне дискретне једначине.

### 9.1.3 Одређивање решења дискретне једначине стања и одређивање излаза вишеструко преносног система матричним приступом у временском домену

Посматра се систем:

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{x}_u(k) \tag{9.12}$$

$$\mathbf{x}_i(k) = C\mathbf{x}(k) + D\mathbf{x}_u(k). \tag{9.13}$$

**Дефиниција 9.7** *Векторска функција* $\boldsymbol{\chi}$ *је решење (кретање, функција прелаза стања) горњег система* $\Longleftrightarrow$

$1^0$ *она идентички задовољава прву од горње две једначине:*

$$\boldsymbol{\chi}\left[(k+1);0;\mathbf{x}_0;\mathbf{x}_{u[0,k]}\right] = A\boldsymbol{\chi}\left[k;0;\mathbf{x}_0;\mathbf{x}_{u[0,k-1]}\right] + B\mathbf{x}_u(k)$$

$$\forall k \geq 0, \forall \mathbf{x}_0 \in \Re^n, \forall \mathbf{x}_u \in \Re^M.$$

$2^0$ *и идентички задовољава почетни услов:*

$$\boldsymbol{\chi}[0;0;\mathbf{x}_0;\mathbf{x}_u] = \mathbf{x}_0,\ \forall \mathbf{x}_0 \in \Re^n,\ \forall \mathbf{x}_u \in \Re^M$$

*при чему се дефинише да је:*

$$\mathbf{x}_{u[0,k]} = 0_u,\ \forall k < 0,\ 0_u \in \Re^M.$$

**Дефиниција 9.8** *Векторска функција* $\boldsymbol{\chi}_i$ *је функција излаза (временски одзив, одзив) система 10.1 10.2* $\Longleftrightarrow$

$1^0$ *она идентички задовољава једначину излаза:*

$$\boldsymbol{\chi}_i\left(k;0;\mathbf{x}_0;\mathbf{x}_{u[0,k]}\right) \equiv C\boldsymbol{\chi}\left(k;0;\mathbf{x}_0;\mathbf{x}_{u[0,k-1]}\right) + D\mathbf{x}_u(k),$$

$2^0$ *идентички задовољава почетни услов:*

$$\boldsymbol{\chi}_i(0;0;\mathbf{x}_0;\mathbf{x}_u(0)) \equiv \mathbf{x}_i(0).$$

Прво се посматра систем 10.1 10.2 у слободном радном режиму:

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) \tag{9.14}$$

$$\mathbf{x}_i(k) = C\mathbf{x}(k). \tag{9.15}$$

Једначина стања 9.14 има $n$ линеарно независних решења.

**Дефиниција 9.9** *Матрична функција* $\mathbf{X} : \mathcal{T}_d \longrightarrow \Re^{n\times n}$ *чије су колоне* $n$ *линеарно независних решења једначине стања 9.14 је фундаментална матрица горњег система. Следи:*

$$\mathbf{X}(k+1) \equiv A\mathbf{X}(k)$$

Нека је $\mathbf{C}$ произвољна несингуларна квадратна матрица. Тада је матрица:

$$\mathbf{Y}(k) = \mathbf{X}(k)\,\mathbf{C}$$

такође фундаментална матрица система 9.14 чим је $\mathbf{X}(k)$ његова фундаментална матрица. Следи да је фундаментална матрица система одређена са тачношћу до мултипликативне матрице $\mathbf{C}$. Посебно је интересантна она фундаментална матрица за коју важи:

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{I}$$

и она се означава са $\mathbf{\Phi}$ тако да је:

$$\mathbf{\Phi}(k+1) \equiv A\mathbf{\Phi}(k)\,,\;\; \mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}.$$

Ова фундаментална матрица је јединствена за дату матрицу $A$.

**Став 9.10** *Фундаментална матрица* $\mathbf{\Phi}$ *система 9.14 9.15 је одређена са:*

$$\mathbf{\Phi}(k) = A^k,\;\; \forall k \geq 0.$$

**Став 9.11** *Фундаментална матрица* $\mathbf{\Phi}$ *система 9.14 9.15 има следеће особине:*

$1^0$ $\mathbf{\Phi}(j) \cdot \mathbf{\Phi}(k) = \mathbf{\Phi}(j+k)\,, \forall j,k = 1,2,\cdots$

$2^0$ $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$

$3^0$ $\det \mathbf{\Phi}(k) \neq 0,\ \forall k = 0,1,2,\cdots$ , *чим је* $A = e^{\widehat{A}T}$

$4^0$ *Ако је* $\det A \neq 0$ *онда је* $\mathbf{\Phi}(-k) = \mathbf{\Phi}^{-1}(k)\,.$

Надаље се усваја да је за произвољну величину $x$ која је дефинисана у тренуцима одабирања:

$$\sum_{j=1}^{0} x(j) = 0.$$

Посматра се сада систем 9.14 9.15 у принудном радном режиму.

**Став 9.12** *Решење једначине стања 10.1 је одређено са:*

$$\boldsymbol{\chi}\left(k;0;\mathbf{x}_0;\mathbf{x}_{u[0,k-1]}\right) = \mathbf{\Phi}(k)\,\mathbf{x}_0 + \sum_{j=1}^{k} \mathbf{\Phi}(k-j)\,B\mathbf{x}_u(j-1)\,.$$

**Последица 9.13** *Решење система 10.1 10.2 у слободном радном режиму одређено је са:*

$$\boldsymbol{\chi}(k;0;\mathbf{x}_0;\mathbf{0}_u) \equiv \mathbf{\Phi}(k)\,\mathbf{x}_0.$$

**Став 9.14** *Функција излаза* $\boldsymbol{\chi}_i$ *система 10.1 10.2 одређена је са:*

$$\boldsymbol{\chi}_i\left(k;0;\mathbf{x}_0;\mathbf{x}_{u[0,k]}\right) = C\left[\mathbf{\Phi}(k)\,\mathbf{x}_0 + \sum_{j=1}^{k} \mathbf{\Phi}(k-j)\,B\mathbf{x}_u(j-1)\right] + D\mathbf{x}_u(k)\,.$$

**Последица 9.15** *Функција излаза* $\boldsymbol{\chi}_i$ *система 10.1 10.2 у слободном радном режиму одређена је са:*

$$\boldsymbol{\chi}_i(k;0;\mathbf{x}_0;\mathbf{0}_u) \equiv C\mathbf{\Phi}(k)\,\mathbf{x}_0.$$

### 9.1.4 Равнотежна стања

Посматра се линеарни стационарни дискретни систем:

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{x}_u(k) \tag{9.16}$$

$$\mathbf{x}_i(k) = C\mathbf{x}(k) + D\mathbf{x}_u(k). \tag{9.17}$$

Претпоставља се да је систем 9.16 9.17 настао као резултат примене Љапуновљеве трансформације координата на одговарајући систем приказан у тоталним координатама.

**Дефиниција 9.16** *Систем 9.16 9.17 је у слободном радном режиму* $\Longleftrightarrow$ *је* $\mathbf{x}_u(k) = \mathbf{0}_u \in \Re^M$ *за* $\forall k$. *У супротном случају он је у принудном радном режиму.*

**Дефиниција 9.17** *Стање* $\mathbf{x}^*$ *система 9.16 9.17 је његово равнотежно стање у ознаци* $\mathbf{x}_r$*:*

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_r$$

$\Longleftrightarrow$ *он у слободном радном режиму у сваком тренутку одабирања остаје у том стању чим је у почетном тренутку био у њему:*

$$\boldsymbol{\chi}(k;\mathbf{x}^*;\mathbf{0}_u) \equiv \mathbf{x}^*.$$

**Став 9.18** *Да би стање* $\mathbf{x}^*$ *било равнотежно стање* $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_r$ *ситема 9.16 9.17 потребно је и довољно да важи:*

$$(\mathbf{I}-A)\,\mathbf{x}^* = \mathbf{0}_x.$$

**Теорема 9.19** *Ова теорема која се у литератури често назива теорема о равнотежним стањима има три дела која следе:*

- $1^0$ *систем 9.16 9.17 увек има равнотежно стање и то* $\mathbf{x}_r = \mathbf{0}_x$.
- $2^0$ *да би систем 9.16 9.17 имао јединствено равнотежно стање* $\mathbf{x}_r = \mathbf{0}_x$ *потребно је и довољно да све сопствене вредности* $\lambda_i(A) \neq 1,\ \forall i = 1, 2, \cdots, n$
- $3^0$ *ако матрица* $A$ *има јединичну сопствену вредност,* $\exists i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ *такво да је* $\lambda_i\{A\} = 1$ *онда систем 9.16 9.17 има неограничено много равнотежних стања која чине хиперраван* $(\mathbf{I}-A)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}_x$ *кроз координатни почетак* $\mathbf{0}_x \in \Re^n$.

**Доказ.** *С обзиром да се теорема састоји од три дела и доказ иде у три дела:*

- $1^0$ *стање* $\mathbf{x}_r = \mathbf{0}_x$ *је увек равнотежно стање система 9.16 9.17 јер оно задовољава*

  $$(\mathbf{I}-A)\cdot\mathbf{0}_x = \mathbf{0}_x$$

  *за сваку* $n \times n$ *матрицу* $A$.

$2^0$ *на основу Кронекер – Капелијевог става о постојању и броју решења хомогеног алгебарског система*

$$(\mathbf{I}-A)\,\mathbf{x}^* = \mathbf{0}_x$$

*следи да постоји јединствено тривијално решење* $\mathbf{x}_r = \mathbf{0}_x$ *једино ако је*

$$\det(\mathbf{I}-A) \neq 0.$$

*С друге стране карактеристична једначина матрице* $A$ *је*

$$\det(\lambda\mathbf{I}-A) = 0$$

*што повлачи да је искључена могућност да је* $\lambda = 1$ *за постојање јединственог равнотежног стања* $\mathbf{x}_r = \mathbf{0}_x$.

$3^0$ *такође, на основу Кронекер – Капелијевог става хомогени систем алгебарских једначина*

$$(\mathbf{I}-A)\,\mathbf{x}^* = \mathbf{0}_x$$

*има бесконачно много решења чим је матрица* $(\mathbf{I}-A)$ *сингуларна:*

$$\det(\mathbf{I}-A) = 0$$

*односно имајући у виду карактеристичну једначину матрице* $A$

$$\det(\lambda\mathbf{I}-A) = 0$$

*чим матрица* $A$ *има јединичну сопствену вредност* $\lambda = 1$.

■

## 9.2 Стабилност

Нека је $\|\mathbf{x}\|$ Еуклидска норма вектора стања:

$$\|\mathbf{x}\| = \left(\mathbf{x}^T\mathbf{x}\right)^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

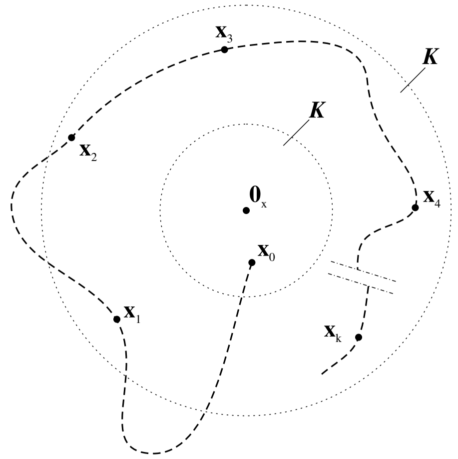
и нека је $\mathcal{K}_\alpha$ ознака за отворену хиперкуглу, у простору стања, полупречника $\alpha$ :

$$\mathcal{K}_\alpha = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| < \alpha\}.$$

### 9.2.1 Особине стабилности нултог равнотежног стања дискретног система

**Дефиниција 9.20** *Равнотежно стање* $\mathbf{x}_r = \mathbf{0}_x$ *система 9.16 9.17 је* **стабилно** *ако и само ако за свако позитивно* $\varepsilon$ $(\varepsilon \in ]0,+\infty[)$ *постоји позитивно* $\delta$ $(\delta \in ]0,+\infty[)$ *чија вредност зависи само од* $\varepsilon$ $(\delta = \delta(\varepsilon))$ *такво да је норма вектора стања тог система у слободном радном режиму мања од* $\varepsilon$ *у сваком тренутку одабирања чим је норма почетног вектора стања мања од* $\delta$ :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ тако да } \|\mathbf{x}_0\| < \delta \Longrightarrow$$
$$\|\boldsymbol{\chi}(k;\mathbf{x}_0;\mathbf{0}_u)\| < \varepsilon \;\forall k = 0,1,2,\cdots$$




Слика 9.4: Илустрација стабилности нултог равнотежног стања

Слика 9.4 илуструје стабилност нултог равнотежног стања.

**Дефиниција 9.21** *Равнотежно стање* $\mathbf{x}_r = \mathbf{0}_x$ *система 9.16 9.17 је* **нестабилно** $\Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ *тако да* $\forall \delta > 0$, $\exists$ *природан број* $L = L(\delta, \varepsilon)$ *и вектор стања* $\mathbf{x}_0$ *такви да важи*:

1. $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$
2. $\|\boldsymbol{\chi}(L; \mathbf{x}_0; \mathbf{0}_u)\| \geq \varepsilon$

**Дефиниција 9.22** *Равнотежно стање* $\mathbf{x}_r = \mathbf{0}_x$ *система 9.16 9.17 је* **привлачно (у целом)** $\Longleftrightarrow \exists \Delta \in ]0, +\infty[\ (\Delta = +\infty)$ *и за свако позитивно* $\mu \in ]0, +\infty[$, $\exists$ *природан број* $L = L(\Delta, \mu)$ *тако да* $\|\mathbf{x}_0\| < \Delta \Longrightarrow$: $\|\boldsymbol{\chi}(k; \mathbf{x}_0; \mathbf{0}_u)\| < \mu$, $\forall k = L+1, L+2, \cdots$ *(ради се о конвергенцији кретања система ка* $\mathbf{0}_x$ *када* $k$ *неограничено расте).*

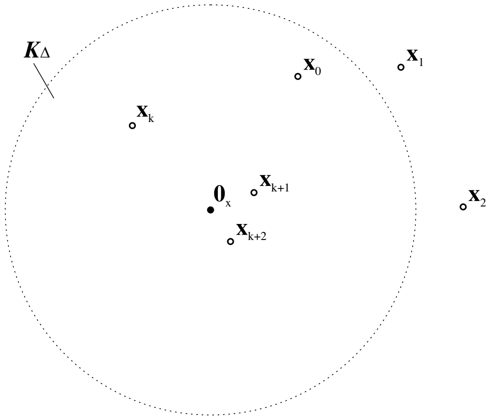
Слика 9.5 илуструје привлачење нултог равнотежног стања.

**Теорема 9.23** *Ако је равнотежно стање* $\mathbf{x}_r = \mathbf{0}_x$ *система 9.16 9.17 привлачно онда је оно привлачно у целом.*

**Став 9.24** *Да би равнотежно стање* $\mathbf{x}_r = \mathbf{0}_x$ *система 9.16 9.17 било привлачно потребно је да оно буде јединствено равнотежно стање тог система.*

**Дефиниција 9.25** *Равнотежно стање* $\mathbf{x}_r = \mathbf{0}_x$ *система 9.16 9.17 је* **асимптотски стабилно (у целом)** $\Longleftrightarrow$ *је оно истовремено и стабилно и привлачно (у целом).*

**Теорема 9.26** *Ако је равнотежно стање* $\mathbf{x}_r = \mathbf{0}_x$ *система 9.16 9.17 асимптотски стабилно онда је оно асимптотски стабилно у целом.*




Слика 9.5: Илустрација привлачења нултог равнотежног стања

### 9.2.2 Особине стабилности дискретног система

**Дефиниција 9.27** *Систем 9.16 9.17 је:*

1. **Стабилан** $\Longleftrightarrow$ *је његово равнотежно стање* $\mathbf{x}_r = \mathbf{0}_x$ *асимптотски стабилно у целом,*
2. **На граници стабилности** $\Longleftrightarrow$ *је његово равнотежно стање* $\mathbf{x}_r = \mathbf{0}_x$ *стабилно а није привлачно,*
3. **Нестабилан** $\Longleftrightarrow$ *је његово равнотежно стање* $\mathbf{x}_r = \mathbf{0}_x$ *нестабилно.*

### 9.2.3 Услови особина стабилности нултог равнотежног стања дискретног система

**Теорема 9.28** *Да би равнотежно стање* $\mathbf{x}_r = \mathbf{0}_x$ *система 9.16 9.17 било стабилно потребно је и довољно да:*

1. *Модуо сваке нуле* $\lambda_i$ *карактеристичног полинома матрице* $A$ *не буде већи од јединице:*
$$|\lambda_i| \leq 1, \forall i = 1, 2, \cdots, n$$
2. *да све нуле* $\lambda_i$ *карактеристичног полинома матрице* $A$ *које су јединичног модула буду једноструке:*
$$|\lambda_i| = 1, \nu_i = 1.$$

**Теорема 9.29** *Да би равнотежно стање* $\mathbf{x}_r = \mathbf{0}_x$ *система 9.16 9.17 било нестабилно потребно је и довољно да карактеристични полином матрице* $A$ *има или:*

1. *Једну нулу* $\lambda_i$ *модула већег од јединице:*
$$\exists i \in \{1, 2, \cdots, n\} \text{ тако да } |\lambda_i| > 1$$

*или*

2. *Једну вишеструку нулу $\lambda_i$ јединичног модула:*

$$\exists i \in \{1, 2, \cdots, n\} \text{ тако да } |\lambda_i| = 1, \nu_i \geq 2$$

*или да важе и 1. и 2.*

**Теорема 9.30** *Да би равнотежно стање $\mathbf{x}_r = \mathbf{0}_x$ система 9.16 9.17 било привлачно потребно је и довољно да модули свих сопствених вредности $\lambda_i$ матрице $A$ буду мањи од јединице:*

$$|\lambda_i(A)| < 1, \forall i = 1, 2, \cdots, n.$$

### 9.2.4 Услови особина стабилности дискретног система

Применом $\mathcal{Z}-$ трансформације на систем 9.16 9.17 добија се:

$$\left.\begin{array}{c} z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = A\mathbf{X}(z) + B\mathbf{X}_u(z) \\ \mathbf{X}_i(z) = C\mathbf{X}(z) + C\mathbf{X}_u(z) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{X}(z) = z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}B\mathbf{X}_u(z) \\ \mathbf{X}_i(z) = zC(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + \left[C(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}B + D\right]\mathbf{X}_u(z) \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad (9.18)$$

$$\boldsymbol{\chi}(k; \mathbf{x}_0; \mathbf{x}_u) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}B\mathbf{X}_u(z)\right\}$$

$$\mathbf{x}_i(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{zC(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + \left[C(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}B + D\right]\mathbf{X}_u(z)\right\}$$

$Z-$преносна матрица система 9.16 9.17 се налази на основу једначина 9.18 за $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}_x$:

$$\mathbf{X}_i(z) = \left[C(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}B + D\right]\mathbf{X}_u(z) = \mathbf{W}[z]\mathbf{X}_u(z) \Longrightarrow$$

$$\mathbf{W}(z) = C(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}B + D = \frac{1}{f(z)}\left[C\,\mathrm{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})B + Df(z)\right]$$

где је

$$f(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A})$$

карактеристични полином матрице $A$, а истовремено и карактеристични полином целог система.

**Дефиниција 9.31** *Број $z^*$ је пол $Z-$преносне матрице $\mathbf{W}(z)$ система 9.16 9.17 $\Longleftrightarrow$ је он пол најмање једног њеног елемента $W_{ij}(z)$.*

**Став 9.32** *Између полова $Z-$преносне матрице $\mathbf{W}(z)$ и сопствених вредности матрице $A$ постоји једнозначна коресподенција.*

**Теорема 9.33** *Да би систем 9.16 9.17 био стабилан (да би његово равнотежно стање $\mathbf{x}_r = \mathbf{0}_x$ било асимптотски стабилно у целом) потребно је и довољно да модули свих полова $z_i^*$ његове $Z-$преносне матрице $\mathbf{W}(z)$ буду мањи од јединице:*

$$|z_i^*| < 1, \forall i = 1, 2, \cdots, n.$$