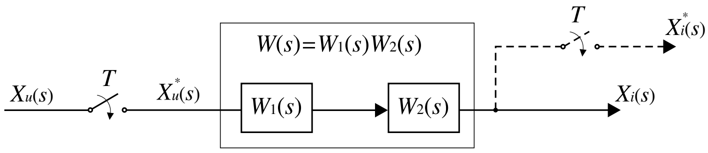
Поглавље 7

Блок дијаграми дискретних система

Став 7.1 *Структурни дијаграм дискретног система у коме су све величине приказане својим Лапласовим трансформацијама а сви временски непрекидни подсистеми су приказани својим преносним функцијама је s−блок дијаграм тог система.*

7.1 Блок дијаграми редних спрега

1. На слици 7.1 приказан је дискретни систем који се састоји од два подсистема између којих не постоји одабирач.



Слика 7.1: Дискретни систем са два подсистема без одабирача између њих

Да би се добила дискретна преносна функција целог система полази се од Лапласове трансформације $X_i(s)$ излазног сигнала $x_i(t)$. На основу приказаног блок дијаграма следи:

$$X_i(s) = W_1(s) \cdot W_2(s) \cdot X_u^*(s) = W(s)\, X_u^*(s) \Longrightarrow$$

$$X_i^*(s) = W^*(s)\, X_u^*(s) = [W(s)]^* \, X_u^*(s) =$$

$$= [W_1(s)\, W_2(s)]^* \, X_u^*(s) = \underset{\substack{\text{симболично} \\ \text{означавање}}}{W_1 W_2^*(s)} \cdot X_u^*(s)$$

Напомена 7.2 $W_1W_2^*(s) \neq W_1^*(s)\, W_2^*(s)$ *и* $W_1W_2^*(s) = W_2W_1^*(s)$.

Слично

$$W(z) = W_1W_2(z) = \left. W_1W_2^*(s) \right|_{z=\frac{1}{T}\ln z}$$

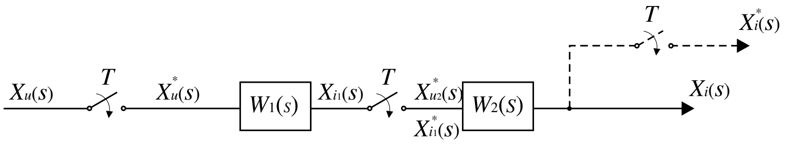
је $Z-$преносна функција целог система.

Напомена 7.3 $W_1W_2(z) \neq W_1(z)\, W_2(z)$.

2. На слици 7.2 приказан је дискретни систем који се састоји од два подсистема између којих постоји одабирач.

   Да би се добила дискретна преносна функција целог система полази се од Лапласове трансформације $X_i(s)$ излазног сигнала $x_i(t)$. На основу приказаног блок дијаграма следи:

$$\left. \begin{array}{l} X_i(s) = W_2(s) \cdot X_{u2}^*(s) \\ X_{i1}(s) = W_1(s) \cdot X_u^*(s) \end{array} \right\} \Longrightarrow$$



Слика 7.2: Дискретни систем са два подсистема са одабирачем између њих

$$\left.\begin{array}{l} X_i^*(s) = W_2^*(s) \cdot X_{u2}^*(s) \\ X_{i1}^*(s) = W_1^*(s) \cdot X_u^*(s) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$X_i^*(s) = W_1^*(s)\, W_2^*(s)\, X_u^*(s)$$

због

$$X_{u2}^*(s) = X_{i1}^*(s) \, .$$

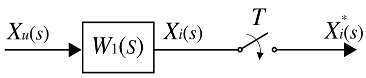
Следи:

$$W^*(s) = W_1^*(s)\, W_2^*(s) \, .$$

Слично:

$$W(z) = W_1(z)\, W_2(z) \, .$$

3. На слици 7.3 приказан је дискретни систем који се састоји од редне везе једног подсистема и идеалног одабирача на излазу.



Слика 7.3: Редна веза једног подсистема и идеалног одабирача

Полази се од Лапласове трансформације $X_i(s)$ излазног сигнала $x_i(t)$ подсистема. На основу приказаног блок дијаграма следи:

$$X_i(s) = W_1(s)\, X_u(s) \Longrightarrow$$

$$X_i^*(s) = W_1 X_u^*(s) \neq W_1^*(s)\, X_u^*(s) \Longrightarrow$$

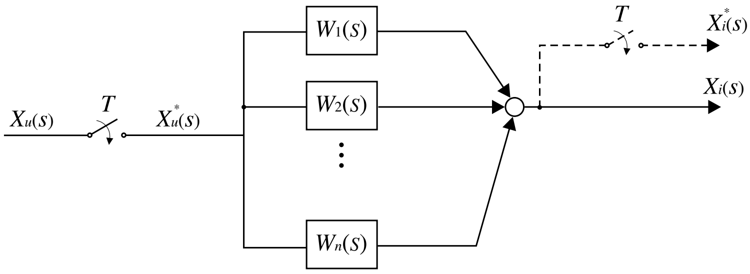
У овом случају не може се говорити о дискретној преносној функцији ($Z-$преносној функцији) целог система.

7.2 Блок дијаграми паралелних спрега

На слици 7.4 приказан је дискретни систем који се састоји од паралелно спрегнутих подсистема.

Да би се добила дискретна преносна функција целог система полази се од Лапласове трансформације $X_i(s)$ излазног сигнала $x_i(t)$. На основу приказаног блок дијаграма следи:

$$X_i(s) = \left[\sum_{k=1}^{n} W_k(s)\right] X_u^*(s) \Longrightarrow$$



Слика 7.4: Дискретни систем са паралелно спрегнутим подсистемима

$$X_i^*(s) = \left[\sum_{k=1}^{n} W_k(s)\right]^* X_u^*(s) =$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} W_k^*(s)\right] X_u^*(s) \Longrightarrow$$

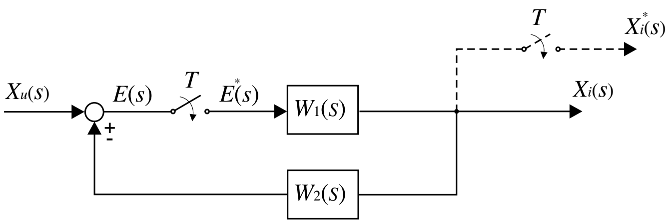
$$W^*(s) = \sum_{k=1}^{n} W_k^*(s).$$

Слично:

$$W(z) = \sum_{k=1}^{n} W_k(z)$$

7.3 Блок дијаграми повратних спрега

1. На слици 7.5 приказан је дискретни систем који се састоји од два подсистема повратно спрегнута са одабирачем у главној грани на улазу у подсистем главне гране.



Слика 7.5: Дискретни систем са два повратно спрегнута подсистема и одабирачем у главној грани на улазу у подсистем главне гране

Да би се добила дискретна преносна функција целог система полази се од Лапласове трансформације $X_i(s)$ излазног сигнала $x_i(t)$. На основу приказаног блок дијаграма следи:

$$X_i(s) = W_1(s) \cdot E^*(s) \Longrightarrow$$

$$X_i^*(s) = W_1^*(s) \cdot E^*(s) \tag{7.1}$$

Такође, на основу блок дијаграма следи:

$$E(s) = X_u(s) \pm W_2(s) W_1(s) E^*(s) \Longrightarrow$$
$$E^*(s) = X_u^*(s) \pm W_2 W_1^*(s) E^*(s) \Longrightarrow$$
$$E^*(s) = \frac{1}{1 \mp W_1 W_2^*(s)} X_u^*(s). \tag{7.2}$$

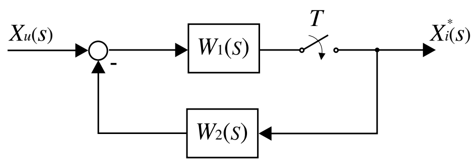
На основу израза 7.1 и 7.2 следи:

$$X_i^*(s) = \frac{W_1^*(s)}{1 \mp W_1 W_2^*(s)} X_u^*(s) \Longrightarrow$$
$$W^*(s) = \frac{W_1^*(s)}{1 \mp W_1 W_2^*(s)}.$$

Слично:

$$W(z) = \frac{W_1(z)}{1 \mp W_1 W_2(z)}.$$

2. На слици 7.6 приказан је дискретни систем који се састоји од два подсистема повратно спрегнута са одабирачем у главној грани на излазу подсистема главне гране.



Слика 7.6: Дискретни систем са два повратно спрегнута подсистема и одабирачем у главној грани на излазу подсистема главне гране

Комплексни лик $X_i^*(s)$ временски дискретизованог излазног сигнала $x_i^*(t)$ и $z-$комплексни лик излазног сигнала $x_i(t)$ су:

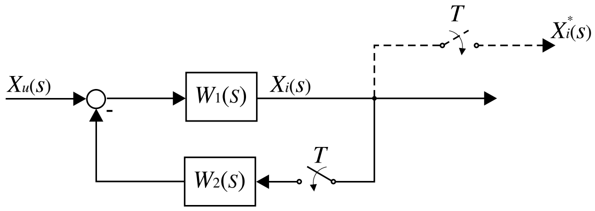
$$X_i^*(s) = \frac{W_1 X_u^*(s)}{1 + W_1 W_2^*(s)},$$
$$X_i(z) = \frac{W_1 X_u(z)}{1 + W_1 W_2(z)}.$$

Преносне функције немају смисла.

3. На слици 7.7 приказан је дискретни систем који се састоји од два подсистема повратно спрегнута са одабирачем у повратној грани на улазу подсистема повратне гране.

Комплексни лик $X_i^*(s)$ временски дискретизованог излазног сигнала $x_i^*(t)$ и $z-$комплексни лик излазног сигнала $x_i(t)$ су:

$$X_i^*(s) = \frac{W_1 X_u^*(s)}{1 + W_1 W_2^*(s)},$$

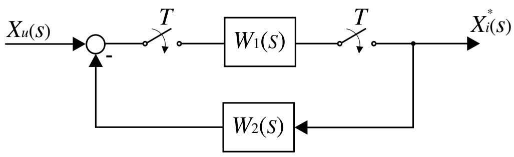


Слика 7.7: Дискретни систем са два повратно спрегнута подсистема и одабирачем у повратној грани на улазу у подсистем повратне гране

$$X_i\left(z\right)=\frac{W_1X_u\left(z\right)}{1+W_1W_2\left(z\right)}.$$

Преносне функције немају смисла.

4. На слици 7.8 приказан је дискретни систем који се састоји од два подсистема повратно спрегнута са одабирачима у главној грани и то на улазу и на излазу подсистема главне гране.



Слика 7.8: Дискретни систем са два повратно спрегнута подсистема и одабирачима у главној грани на улазу и на излазу подсистема главне гране

Дискретна преносна функција и $Z-$преносна функција целог система су:

$$W^*\left(s\right)=\frac{W_1^*\left(s\right)}{1+W_1^*\left(s\right)W_2^*\left(s\right)},$$

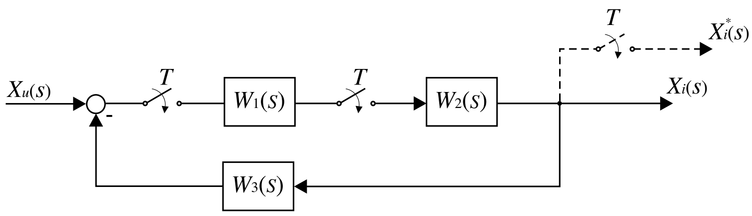
$$W\left(z\right)=\frac{W_1\left(z\right)}{1+W_1\left(z\right)W_2\left(z\right)}.$$

5. На слици 7.9 приказан је дискретни систем који се састоји од повратне спеге која у главној грани има два подсистема и у повратној грани има један подсистем и са два одабирача у главној грани и то на улазу и на излазу првог подсистема главне гране.

Дискретна преносна функција и $Z-$преносна функција целог система су:

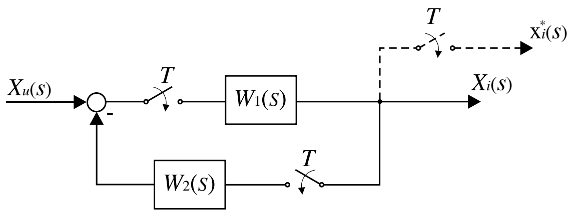
$$W^*\left(s\right)=\frac{W_1^*\left(s\right)W_2^*\left(s\right)}{1+W_1^*\left(s\right)W_2W_3^*\left(s\right)},$$

$$W\left(z\right)=\frac{W_1\left(z\right)W_2\left(z\right)}{1+W_1\left(z\right)W_2W_3\left(z\right)}.$$



Слика 7.9: Дискретни систем са повратно спрегнутим подсистема, два у главној грани и један у повратној грани, и одабирачима у главној грани на улазу и на излазу првог подсистема главне гране

6. На слици 7.10 приказан је дискретни систем који се састоји од два подсистема повратно спрегнута са одабирачима у главној грани на улазу подсистема главне гране и у повратној грани такође на улазу подсистема повратне гране.



Слика 7.10: Дискретни систем са два повратно спрегнута подсистема и одабирачима у главној грани на улазу у подсистем главне гране и у повратној грани на улазу у подсистем повратне гране

Дискретна преносна функција и $Z-$преносна функција целог система су:

$$W^*(s) = \frac{W_1^*(s)}{1 + W_1^*(s)\, W_2^*(s)},$$

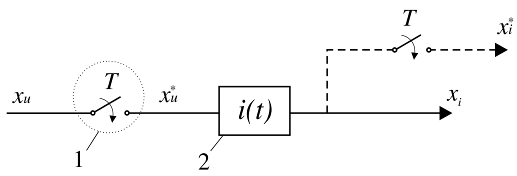
$$W(z) = \frac{W_1(z)}{1 + W_1(z)\, W_2(z)}.$$

Поглавље 8

Математичко моделовање дискретних система

8.1 Дискретизација диференцијалне једначине понашања - дискретна једначина понашања

На слици 8.1 приказана је редна веза идеалног одабирача и линеарног стационарног временски непрекидног система заједно са фиктивним одабирачем на излазу ове редне везе.



Слика 8.1: Редна веза идеалног одабирача и линеарног стационарног временски непрекидног система са фиктивним одабирачем на излазу

При томе су коришћене следеће ознаке:

1 – идеални одабирач

2 – линеарни стационарни временски непрекидан систем.

Нека је диференцијална једначина понашања система 2:

$$\widehat{\alpha}_n x_i^{(n)}(t) + \widehat{\alpha}_{n-1} x_i^{(n-1)}(t) + \cdots + \widehat{\alpha}_1 \dot{x}_i(t) + \widehat{\alpha}_0 x_i(t) =$$

$$= \widehat{\beta}_0 x_u(t) + \widehat{\beta}_1 \dot{x}_u(t) + \cdots + \widehat{\beta}_m x_u^{(m)}(t); \quad n \geq m. \tag{8.1}$$

Када је у питању горња конфигурација (редна веза са идеалним одабирачем при чему он претходи систему) временски дискретан улазни сигнал x_u^* није диференцијабилан у тренуцима одабирања тако да тада десна страна диференцијалне једначине 8.1 није дефинисана. Због тога се прибегава опису динамичког понашања само у тренуцима одабирања, који се добија тз. дискретизацијом диференцијалне једначине понашања 8.1. Поступак дискретизације следи.

Према дефиницији први извод функције $x(t)$ у тренутку t је:

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

ако ова гранична вредност постоји. Слично, $k-$ ти извод функције $x(t)$ у тренутку t је дефинисан са:

$$\frac{d^k x(t)}{dt^k} = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{x^{(k-1)}(t+\Delta t) - x^{(k-1)}(t)}{\Delta t}.$$

Ако је Δt довољно мало и различито од нуле онда је:

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

и

$$\frac{d^k x\left(t\right)}{dt^k} \approx \frac{\Delta x^{(k-1)}\left(t\right)}{\Delta t} \approx \frac{\Delta\left(\frac{\Delta x^{(k-2)}(t)}{\Delta t}\right)}{\Delta t} = \frac{\Delta^2 x^{(k-2)}\left(t\right)}{\Delta t^2} \approx \cdots \approx \frac{\Delta^k x\left(t\right)}{\Delta t^k}.$$

Ако је периода одабирања довољно мала онда се може усвојити да је $\Delta t = T \Longrightarrow$:

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{\Delta x\left(t\right)}{T}$$

односно

$$\frac{d^k x\left(t\right)}{dt^k} \approx \frac{\Delta^k x\left(t\right)}{T^k}.$$

Када се изводи у диференцијалној једначини понашања замене коначним разликама добија се:

$$\frac{\widehat{\alpha}_n}{T^n}\Delta^n x_i\left(t\right) + \frac{\widehat{\alpha}_{n-1}}{T^{n-1}}\Delta^{n-1} x_i\left(t\right) + \cdots + \frac{\widehat{\alpha}_1}{T}\Delta x_i\left(t\right) + \frac{\widehat{\alpha}_0}{T^0} x_i\left(t\right) =$$

$$= \frac{\widehat{\beta}_0}{T^0} x_u\left(t\right) + \frac{\widehat{\beta}_1}{T}\Delta x_u\left(t\right) + \cdots + \frac{\widehat{\beta}_m}{T^m}\Delta^m x_u\left(t\right). \tag{8.2}$$

Пошто нас интересују вредности излазног сигнала у тренуцима одабирања онда се усваја:

$$t \in \mathcal{T}_{d_0},\ \text{тј. } t = kT,\ k = 0, 1, 2, \cdots$$

Пошто је периода одабирања T константна онда је $k-$ ти тренутак одабирања одређен управо бројем k па се могу користити ознаке

$$x_u\left(k\right) \quad \text{и} \quad x_i\left(k\right)$$

за вредност улазног и излазног сигнала у $k-$ ом тренутку одабирања. Сада се једначина 8.2 може написати као:

$$\frac{\widehat{\alpha}_n}{T^n}\Delta^n x_i\left(k\right) + \frac{\widehat{\alpha}_{n-1}}{T^{n-1}}\Delta^{n-1} x_i\left(k\right) + \cdots + \frac{\widehat{\alpha}_1}{T}\Delta x_i\left(k\right) + \frac{\widehat{\alpha}_0}{T^0} x_i\left(k\right) =$$

$$= \frac{\widehat{\beta}_0}{T^0} x_u\left(k\right) + \frac{\widehat{\beta}_1}{T}\Delta x_u\left(k\right) + \cdots + \frac{\widehat{\beta}_m}{T^m}\Delta^m x_u\left(k\right). \tag{8.3}$$

Једначина 8.3 је **диференцна једначина понашања**.

Уводи се оператор померања:

$$Ex\left(k\right) = x\left(k+1\right) \Longrightarrow$$

$$\Delta x\left(k\right) = x\left(k+1\right) - x\left(k\right) = Ex\left(k\right) - x\left(k\right) = \left(E-1\right)x\left(k\right)$$

$$\Delta^2 x\left(k\right) = \Delta\left[\Delta x\left(k\right)\right] = \left(E-1\right)\Delta x\left(k\right) = \left(E-1\right)\left(E-1\right)x\left(k\right) = \left(E-1\right)^2 x\left(k\right).$$

Математичком индукцијом лако се показује да је:

$$\Delta^j x\left(k\right) = \left(E-1\right)^j x\left(k\right).$$

Користећи ову релацију и

$$E^j x(k) = x(k+j)$$

диференцна једначина понашања може лако да се доведе на следећи облик:

$$\alpha_n x_i(k+n) + \alpha_{n-1} x_i(k+n-1) + \cdots + \alpha_1 x_i(k+1) + \alpha_0 x_i(k) =$$

$$= \beta_0 x_u(k) + \beta_1 x_u(k+1) + \cdots + \beta_m x_u(k+m), \quad \forall k = 0, 1, 2, \cdots$$

или у компактној форми

$$\sum_{r=0}^{n} \alpha_r x_i(k+r) = \sum_{r=0}^{m} \beta_r x_u(k+r) \tag{8.4}$$

где су:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{n-i} &= \sum_{j=0}^{i} \frac{\widehat{\alpha}_{n-j}}{T^{n-j}} (-1)^{i-j} \left(\begin{array}{c} n-j \\ i-j \end{array} \right) \\ \beta_{m-i} &= \sum_{j=0}^{i} \frac{\widehat{\beta}_{m-j}}{T^{m-j}} (-1)^{i-j} \left(\begin{array}{c} m-j \\ i-j \end{array} \right) \end{aligned} \right\} \text{Ципкинови коефицијенти}$$

Једначина 8.4 је приближна **дискретна једначина понашања** система на временском скупу $\mathcal{T}_{d_0}$ (са периодом одабирања T).

8.2 Решавање дискретне једначине понашања применом $\mathcal{Z}$ трансформације

Користећи ранији резултат

$$\mathcal{Z}\{x(k+i)\} = z^i \left[X(z) - \sum_{j=0}^{i-1} x(j) z^{-j} \right]$$

и примењујући га на дискретну једначину понашања 8.4 добија се:

$$\mathcal{Z}\left\{ \sum_{r=0}^{n} \alpha_r x_i(k+r) \right\} = \mathcal{Z}\left\{ \sum_{r=0}^{m} \beta_r x_u(k+r) \right\} \Longrightarrow$$

$$\sum_{r=0}^{n} \alpha_r \left\{ z^r \left[X_i(z) - \sum_{j=0}^{r-1} x_i(j) z^{-j} \right] \right\} = \sum_{r=0}^{m} \beta_r \left\{ z^r \left[X_u(z) - \sum_{j=0}^{r-1} x_u(j) z^{-j} \right] \right\} \Longrightarrow$$

$$\sum_{r=0}^{n} \alpha_r z^r X_i(z) - \sum_{r=0}^{n} \sum_{j=0}^{r-1} \alpha_r x_i(j) z^{r-j} = \sum_{r=0}^{m} \beta_r z^r X_u(z) - \sum_{r=0}^{m} \sum_{j=0}^{r-1} \beta_r x_u(j) z^{r-j} \Longrightarrow$$

$$X_i(z) = \underbrace{\frac{\sum_{r=0}^{m}\beta_r z^r}{\sum_{r=0}^{n}\alpha_r z^r}}_{W(z)} X_u(z) + \underbrace{\frac{\sum_{r=0}^{n}\sum_{j=0}^{r-1}\alpha_r x_i(j)\, z^{r-j} - \sum_{r=0}^{m}\sum_{j=0}^{r-1}\beta_r x_u(j)\, z^{r-j}}{\sum_{r=0}^{n}\alpha_r z^r}}_{Y(z)} \Longrightarrow$$

$$x_i(k) \quad = \quad \mathcal{Z}^{-1}\{X_i(z)\}$$