Поглавље 6

Z трансформација

6.1 Дефиниција z комплексног броја

Z трансформација је основни математички апарат за анализу динамичког понашања дискретних система у комплексном домену. Оно што је Лапласова трансформација за временски непрекидне системе то Z трансформација претставља за дискретне системе.

Уводи се комплексни број z:

$$z = e^{sT}.$$

Различити облици комплексног броја z:

$$z = |z|\, e^{j \arg z}.$$

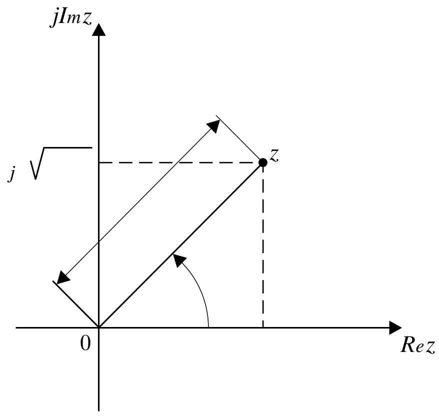
Ако се уведу ознаке $|z| = \Omega$ и $\arg z = \phi \Longrightarrow$

$$z = \Omega e^{j\phi} = \Omega\left(\cos\phi + j\sin\phi\right)$$

и даље уведе ознака $\eta = \cos\phi \Longrightarrow$

$$z = \eta\Omega + j\Omega\sqrt{1-\eta^2} = \sigma_z + j\omega_z$$

при чему је очигледно уведена ознака $\sigma_z = \eta\Omega$ и $\omega_z = \Omega\sqrt{1-\eta^2}$. На слици 6.1 је приказана у z комплексној равни позиција тачке z са свим њеним параметрима.



Слика 6.1: Позиција тачке z у равни $z-$равни са свим њеним параметрима

Ако се s комплексни број представи у облику:

$$s = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

где је

$$\zeta = -\cos\varphi,\ \varphi = \arg s,\ \omega_n = |s| \Longrightarrow$$

$$z = e^{-\zeta\omega_n T} \cdot e^{j\omega_n T\sqrt{1-\zeta^2}} = e^{-\zeta\omega_n T}\left(\cos\omega_n T\sqrt{1-\zeta^2} + j\sin\omega_n T\sqrt{1-\zeta^2}\right) \Longrightarrow$$

$$\Omega = e^{-\zeta\omega_n T},\ \phi = \omega_n T\sqrt{1-\zeta^2}$$

Ако се s комплексни број представи у облику:

$$s = \sigma + j\omega$$

где је очигледно $\sigma = \operatorname{Re} s$ и $\omega = \operatorname{Im} s \Longrightarrow$

$$z = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = e^{\sigma T}\left(\cos\omega T + j\sin\omega T\right) \Longrightarrow$$

$$\Omega = e^{\sigma T},\ \phi = \omega T.$$

6.2 Пресликавање s равни у z раван

Пресликавање $s-$равни у $z-$раван је одређено са:

$$z = e^{sT}$$

и оно је једнозначно.

Пресликавање из $z-$равни у $s-$раван је одређено са:

$$s = \frac{1}{T}\ln z + jk\omega_0 \tag{6.1}$$

и оно је вишезначно.

Дигресија 6.1 *Добијање израза 6.1:*

$$e^{sT} = z \Longrightarrow$$

$$e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega T} = |z|\, e^{j\arg z}$$

при чему је очигледно искоришћено да је $s = \sigma + j\omega$. *Пошто је функција*

$$e^{j\arg z}$$

периодична $\Longrightarrow$

$$e^{j\arg z} = e^{j(\arg z + 2k\pi)}, k = 0, \pm1, \pm2, \pm\,3, \cdots \Longrightarrow$$

$$e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega T} = |z|\, e^{j(\arg z + 2k\pi)} \Longrightarrow$$

$$e^{\sigma T} = |z| \Longrightarrow \sigma T = \ln|z|$$

и

$$\omega T = \arg z + 2k\pi,\ k = 0, \pm1, \pm2, \pm\,3, \cdots$$

Даље следи:

$$\sigma T + j\omega T = \ln|z| + j\left(\arg z + 2k\pi\right) = \ln|z| + j\arg z + j2k\pi.$$

Пошто је по дефиницији:

$$\ln z = \ln|z| + j\arg z \Longrightarrow$$

$$\sigma T + j\omega T = \ln z + j2k\pi \Longrightarrow$$

$$s = \sigma + j\omega = \frac{1}{T}\ln z + j\frac{2k\pi}{T} = \frac{1}{T}\ln z + jk\omega_0$$

што је исти израз који је раније дат.

Повратак на главни ток излагања!

На основу периодичности функције e^{sT} следи:

$$z = e^{sT} = e^{sT+j2k\pi} \Longrightarrow$$

$$z = e^{sT} = e^{T(s+jk\omega_0)},\ \forall k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm\ 3, \cdots$$

Ово показује да се све тачке из $s-$равни са истим реалним делом чији се имагинарни делови разликују за $m\omega_0$, $m \in \mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}$ је скуп целих бројева, пресликавају у исту тачку у $z-$равни, што је исти закључак као онај о вишезначности пресликавања из $z-$равни у $s-$раван.

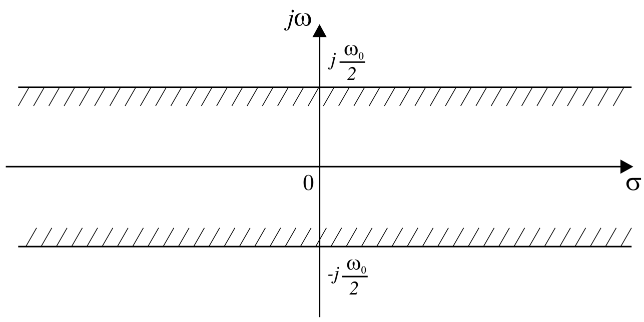
Следи да је за пресликавање $s-$равни у $z-$раван довољно пресликати основни појас $\overline{P}_0$:

$$\overline{P}_0 = \left\{ s : s = \sigma + j\omega, \sigma \in \mathcal{R}, \omega \in \left[-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}\right]\right\}$$

из $s-$равни у $z-$раван, пошто је слика сваког другог појаса $\overline{P}_k$:

$$\overline{P}_k = \left\{ s : s = \sigma + j\omega, \sigma \in \mathcal{R}, \omega \in \left[\frac{(2k-1)\,\omega_0}{2}, \frac{(2k+1)\,\omega_0}{2}\right]\right\}, \forall k = \pm 1, \pm 2, \pm\ 3, \cdots$$

из $s-$равни у $z-$раван исто што и слика основног појаса $\overline{P}_0$ из $s-$равни у $z-$раван. На слици 6.2 је приказан основни појас $s-$равни.



Слика 6.2: Основни појас $s-$равни

Због наведеног разматраће се само пресликавање основног појаса $s-$равни у $z-$раван.

6.2.1 Пресликавање интервала $\left[-\frac{j\omega_0}{2}, \frac{j\omega_0}{2}\right]$

Интервал $\left[-\frac{j\omega_0}{2}, \frac{j\omega_0}{2}\right]$ је део имагинарне осе у $s-$равни који се пресликава у $z-$раван на следећи начин:

$$z = e^{j\omega T} = \cos\omega T + j\sin\omega T \Longrightarrow$$

$$\Omega = 1 \text{ и } \phi = \omega T.$$

Из последњег израза следи следећа анализа:

$$\omega = -\frac{\omega_0}{2} \Longrightarrow \phi = -\frac{\omega_0 T}{2} = -\pi$$

$$\omega = \left]-\frac{\omega_0}{2}, 0\right[\Longrightarrow \phi =]-\pi, 0[$$

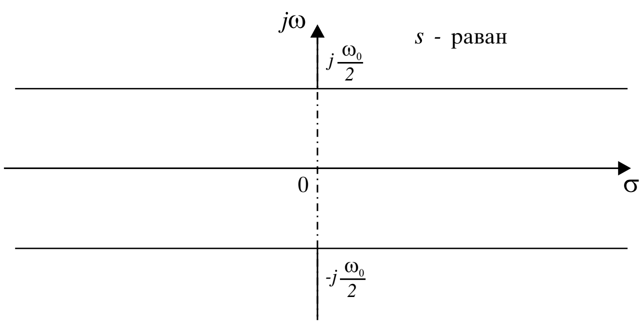
$$\omega = 0 \Longrightarrow \phi = 0$$

$$\omega = \left]0, \frac{\omega_0}{2}\right[\Longrightarrow \phi =]0, \pi[$$

и најзад

$$\omega = \frac{\omega_0}{2} \Longrightarrow \phi = \pi.$$

На слици 6.3 је приказан део имагинарне осе у $s-$равни који се пресликава у $z-$раван а на слици 6.4 је приказана одговарајућа слика у $z-$равни што проистиче из горње анализе.

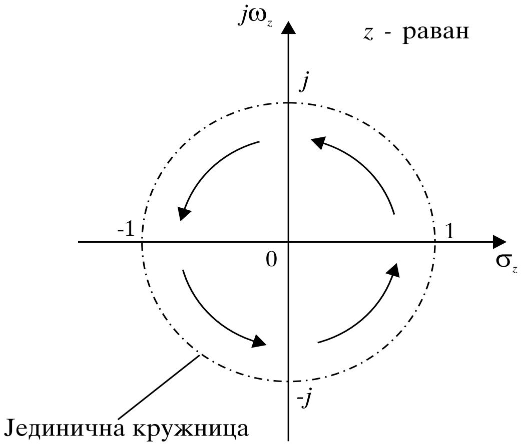


Слика 6.3: Део имагинарне осе у $s-$равни који се пресликава у $z-$раван

Сваки други интервал

$$\left[\frac{j\,(2k-1)\,\omega_0}{2}, \frac{j\,(2k+1)\,\omega_0}{2}\right], \forall k = \pm1, \pm2, \pm\ 3, \cdots$$

се такође пресликава у јединичну кружницу што значи да се цела имагинарна оса $s-$равни пресликава у јединичну кружницу у $z-$равни.



Слика 6.4: Јединична кружница у $z-$равни

6.2.2 Пресликавање правих $s = \sigma \pm \frac{j\omega_0}{2}, \sigma \in \mathcal{R}$

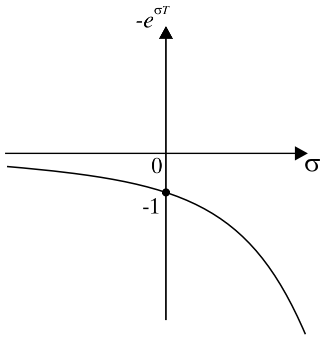
Ове две праве ограничавају основни појас $\overline{P}_0$ у $s-$равни тако да пресецају имагинарну осу у тачкама $-j\frac{\omega_0}{2}$ и $j\frac{\omega_0}{2}$. Ове две тачке се пресликавају у тачку $z = -1$, што је већ показано. Слика актуелних двеју правих у $z-$равни се добија уз помоћ дефиниције $z-$комплексног броја тј.:

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{-j\frac{\omega_0 T}{2}} = e^{\sigma T} e^{-j\pi} = -e^{\sigma T}. \tag{6.2}$$

Слично је и за другу праву:

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\frac{\omega_0 T}{2}} = e^{\sigma T} e^{j\pi} = -e^{\sigma T}. \tag{6.3}$$

На слици 6.5 је приказана функција $-e^{\sigma T}$ па се на основу изгледа те функције и на основу израза 6.2 и 6.3 закључује да се обе праве очигледно пресликавају у негативни део реалне осе у $z-$равни.



Слика 6.5: Функција $-e^{\sigma T}$

То следи и на основу следеће анализе:

$$\sigma = -\infty \Longrightarrow z = 0$$

$$\sigma \in]-\infty, 0[\Longrightarrow z =]0, -1[$$

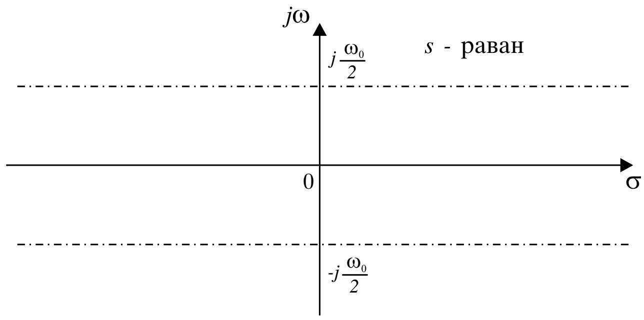
$$\sigma = 0 \Longrightarrow z = -1$$

$$\sigma \in]0, +\infty[\Longrightarrow z =]-1, -\infty[$$

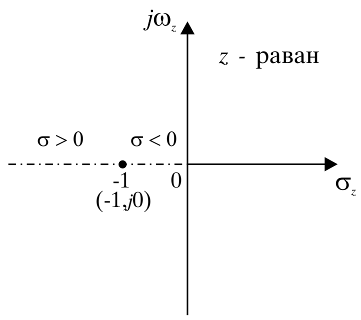
и најзад

$$\sigma = +\infty \Longrightarrow z = -\infty.$$

На слици 6.6 су приказане праве које ограничавају основни појас $\overline{P}_0$ и које се пресликавају у $z-$раван а на слици 6.7 је приказана слика ове две праве у $z-$равни а то је негативни део реалне осе у $z-$равни.



Слика 6.6: Праве које ограничавају основни појас $\overline{P}_0$



Слика 6.7: Слика правих $s = \sigma \pm \frac{j\omega_0}{2}, \sigma \in \mathcal{R}$ из $s-$равни у $z-$раван

Делови обе поменуте праве лево од имагинарне осе пресликавају се у интервал $]-1, 0[$, а њихови делови десно од имагинарне осе у интервал $]-\infty, -1[$. На исти начин се пресликавају и праве

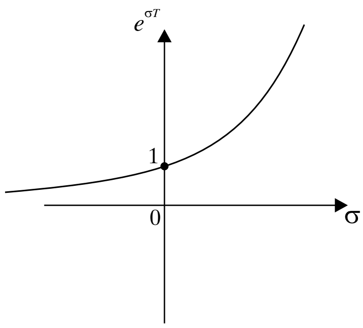
$$s = \sigma + j\frac{(2k-1)\,\omega_0}{2}, \;\forall k = -1, \pm 2, \pm\, 3, \cdots$$

6.2.3 Пресликавање реалне осе $s = \sigma \in \mathcal{R}$

Ово пресликавање се остварује на основу дефиниције $z-$комплексног броја тј.:

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T}. \tag{6.4}$$

На слици 6.8 је приказана функција $e^{\sigma T}$ па се на основу изгледа те функције као и на основу израза 6.4 закључује да се реална оса $s-$равни очигледно пресликава у позитивни део реалне осе у $z-$равни.



Слика 6.8: Функција $e^{\sigma T}$

То следи и на основу следеће анализе:

$$\sigma \in \,]-\infty, 0[\Longrightarrow z = \,]0, 1[$$

$$\sigma = 0 \Longrightarrow z = 1$$

$$\sigma \in \,]0, +\infty[\Longrightarrow z = \,]1, +\infty[$$

и најзад

$$\sigma = +\infty \Longrightarrow z = +\infty.$$

Негативан део реалне осе $s-$равни се пресликава у интервал $]0,1[$ реалне осе $z-$равни а позитни део реалне осе $s-$равни се пресликава у интервал $]1,+\infty[$ реалне осе $z-$равни. На слици 6.9 приказана је реална оса $s-$равни а на слици 6.10 је приказана одговарајућа слика у $z-$равни тј. позитивни део реалне осе $z-$равни.

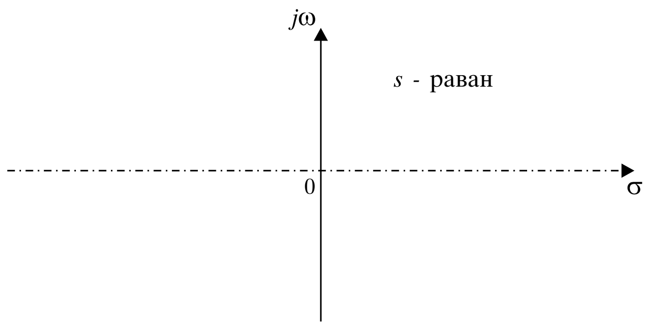
На исти начин се пресликавају и праве

$$s = \sigma + jk\omega_0, \;\; \sigma \in \mathcal{R}, \;\; k = \pm1, \pm2, \pm\, 3, \cdots$$

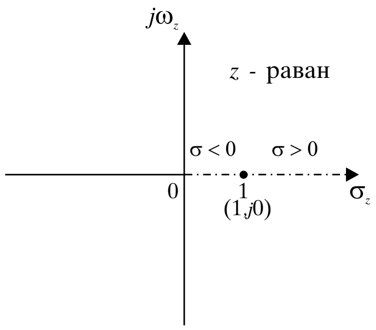
6.2.4 Пресликавање s равни у z раван

На основу свега изложеног може се закључити да:

- лева полураван $s-$равни се пресликава у унутрашњост јединичног круга $z-$равни,
- имагинарна оса $s-$равни се пресликава у јединичну кружницу $z-$равни,



Слика 6.9: Реална оса $s-$равни



Слика 6.10: Слика реалне осе $s-$равни у $z-$раван

- десна полураван $s-$равни се пресликава у спољашност јединичног круга $z-$равни.

На слици 6.11 различитим шрафурама су приказане лева и десна полураван као и имагинарна оса а на слици 6.12 такође различитим шрафурама приказани су унутрашњост и спољашност јединичног круга као и сам јединични круг.

6.2.5 Пресликавање праве одређеног времена смирења

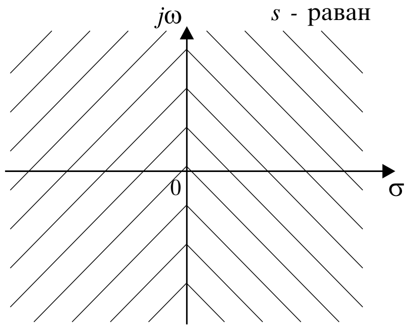
Права

$$s = \sigma + j\omega,\ \sigma \in \left]-\infty, 0\right[,\ \sigma = const$$

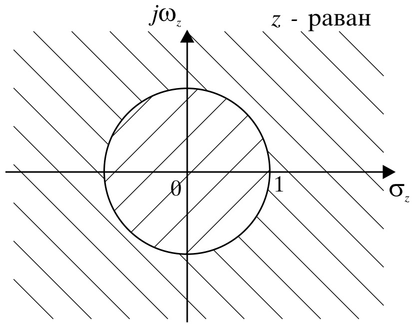
представља геометријско место тачака константног времена смирења. Ово пресликавање се остварује на основу дефиниције $z-$комплексног броја тј.:

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} \Longrightarrow \Omega = e^{\sigma T} \Longrightarrow$$

Посматрана права се пресликава у кружницу полупречника $\Omega = e^{\sigma T}$. На слици 6.13 приказана је права одређеног константног времена смирења а на слици 6.14 приказана је слика те праве у $z-$равни.



Слика 6.11: $s-$раван



Слика 6.12: $z-$раван

6.2.6 Пресликавање праве одређеног степена пригушења

Геометријско место тачака $s-$равни одређеног константног степена пригушења ζ су две полуправе према слици 6.15.

Тачке ових двеју полуправих су:

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \Longrightarrow$$

Слике ових тачака у $z-$равни су:

$$z = e^{-\zeta\omega_n T} \cdot e^{\pm j\omega_n T\sqrt{1-\zeta^2}} \Longrightarrow$$

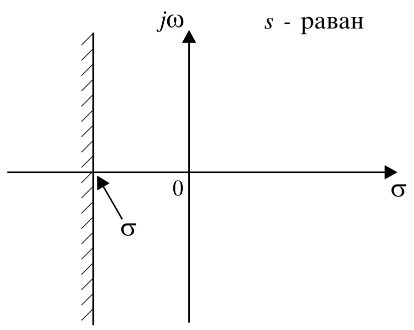
$$\Omega = e^{-\zeta\omega_n T},\ \phi = \pm j\omega_n T\sqrt{1-\zeta^2}.$$

На слици 6.16 приказана је слика полуправих константног степена пригушења ζ из $s-$равни у $z-$раван.

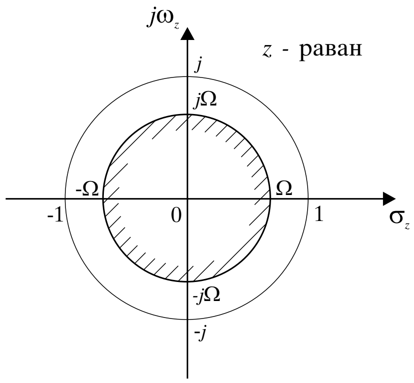
6.3 Дефиниција Z трансформације

Посматра се функција

$$x : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}.$$



Слика 6.13: Права тачака константног времена смирења



Слика 6.14: Слика тачака праве константног времена смирења из $s-$равни у $z-$раван

Претпоставка 6.2 *Функција x је таква да:*

- *$x(kT)$ је дефинисана за $\forall k \in \mathbf{Z}$ при чему је $x(kT) = 0$, $\forall k \in \{\cdots, -2, -1\}$,*
- *или она има прекиде I врсте за неке вредности k при чему је за такве k*

  $$x(kt) = x\left(kT^{+}\right)$$

  уз претпоставку да постоји гранична вредност

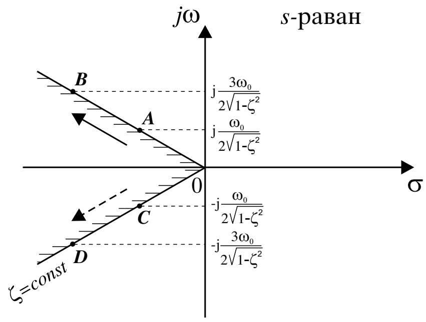
  $$x\left(kT^{+}\right) = \lim_{t \to kT^{+}} x(t).$$

Дефиниција 6.3 *$Z-$трансформација ($Z-$ лик) функције x, за коју важи претходна претпоставка, у ознаци*

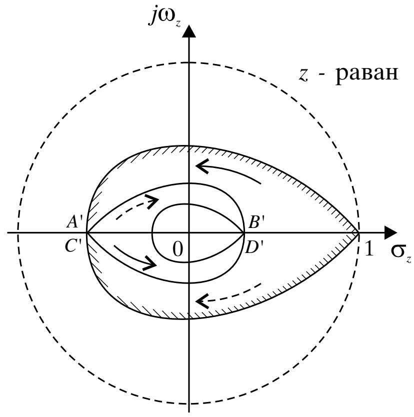
$$\mathcal{Z}\{x(kT)\} = X(z)$$

је следећи негативни степени ред:

$$\mathcal{Z}\{x(kT)\} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}.$$



Слика 6.15: Полуправе тачака константног степена пригушења ζ



Слика 6.16: Слика полуправих константног степена пригушења ζ из $s-$равни у $z-$раван

Очигледно $Z-$трансформација зависи од периоде одабирања T. За фиксно T функција x која задовољава претходну претпоставку има само један $Z-$лик.

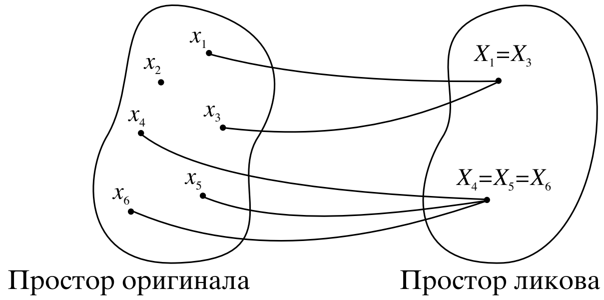
Обрнуто тврђење не важи. За фиксно T једном $Z-$лику може одговарати више функција оригинала x. Разлог је тај што је $Z-$лик одређен вредностима функције x само у тренуцима одабирања. Постоји неограничено много функција које могу да имају једнаке вредности у тренуцима одабирања. На слици 6.17 симболично су приказани простор оригинала са оригиналима и простор ликова са ликовима и њихов међусобни однос.

Ако је за функцију x одређен њен I облик комплексног лика $X^*(s)$:

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\, e^{-kTs}$$

онда се $Z-$лик функције x добија једноставно:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\, z^{-k}$$



Слика 6.17: Симболичан приказ простора оригинала и простора $z-$ликова са неким њиховим елементима и међусобним односом тих елемената

тј.

$$X(z) = X^*(s)|_{s=\frac{1}{T}\ln z + jk\omega_0,\ k\in\mathbf{Z}}\,.$$

Без губитка општости може се усвојити да је $k = 0$ у претходном изразу.

6.3.1 Особине Z трансформације

Особина линеарности

Став 6.4 *$\mathcal{Z}-$трансформација је линеаран оператор:*

$$\mathcal{Z}\{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\} = \alpha_1 \mathcal{Z}\{x_1(t)\} + \alpha_2 \mathcal{Z}\{x_2(t)\}\,.$$

Доказ. *На основу дефиниције $\mathcal{Z}-$трансформације важи:*

$$\mathcal{Z}\{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} [\alpha_1 x_1(kT) + \alpha_2 x_2(kT)]\, z^{-k} =$$

$$= \alpha_1 \sum_{k=0}^{\infty} x_1(kT)\, z^{-k} + \alpha_2 \sum_{k=0}^{\infty} x_2(kT)\, z^{-k} =$$

$$\alpha_1 \mathcal{Z}\{x_1(t)\} + \alpha_2 \mathcal{Z}\{x_2(t)\}$$

чиме је доказ завршен. ∎

Транслација дуж временске осе

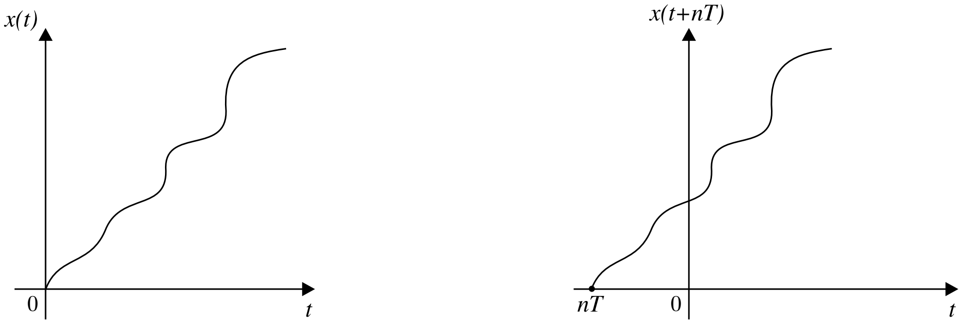
Транслација функције x дуж временске осе може да буде у позитивном или негативном смеру.

Став 6.5 *$\mathcal{Z}-$трансформација функције x транслиране дуж временске осе за nT:*

1. *У негативном смеру је одређена са:*

$$\mathcal{Z}\left\{x\left(t+nT\right)\right\} = z^{n}\left[X\left(z\right) - \sum_{k=0}^{n-1} x\left(kT\right) z^{-k}\right].$$

На слици 6.18 приказана је произвољна функција $x\left(t\right)$ нетранслирана и транслирана у негативном смеру дуж временске осе за nT.

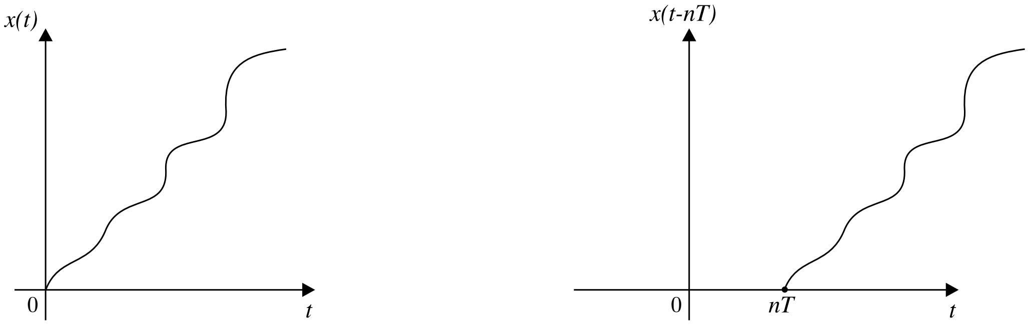


Слика 6.18: Произвољна функција $x\left(t\right)$, нетранслирана и транслирана у негативном смеру временске осе за nT

2. *У позитивном смеру је одређена са:*

$$\mathcal{Z}\left\{x\left(t-nT\right)\right\} = z^{-n} X\left(z\right).$$

На слици 6.19 приказана је произвољна функција $x\left(t\right)$ нетранслирана и транслирана у позитивном смеру дуж временске осе за nT.



Слика 6.19: Произвољна функција $x\left(t\right)$, нетранслирана и транслирана у позитивном смеру временске осе за nT

Доказ. *Доказ се спроводи прво под 1. а потом и под 2.*

1. *$\mathcal{Z}-$трансформација функције x транслиране дуж временске осе за nT у негативном смеру је:*

$$\mathcal{Z}\left\{x\left(t+nT\right)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} x\left[\left(k+n\right)T\right] z^{-k} =$$

$$= z^n \sum_{k=0}^{\infty} x\left[(k+n)T\right] z^{-(k+n)}.$$

После увођења смене $k+n=m \Longrightarrow$

$$k = 0 \rightarrow m = n$$

$$k = \infty \rightarrow m = \infty$$

тако да следи да је:

$$\mathcal{Z}\left\{x\left(t+nT\right)\right\} = z^n \sum_{m=n}^{\infty} x\left(mT\right) z^{-m}. \tag{6.5}$$

Сума на десној страни израза 6.5 може да се напише у виду разлике двеју сума:

$$\mathcal{Z}\left\{x\left(t+nT\right)\right\} = z^n \left[\sum_{m=0}^{\infty} x\left(mT\right) z^{-m} - \sum_{m=0}^{n-1} x\left(mT\right) z^{-m}\right]. \tag{6.6}$$

Прва сума у средњој загради на десној страни израза 6.6 је очигледно $\mathcal{Z}-$*трансформација функције x а у другој суми истог израза уместо променљиве m користи се променљива k:*

$$\mathcal{Z}\left\{x\left(t+nT\right)\right\} = z^n \left[X\left(z\right) - \sum_{k=0}^{n-1} x\left(kT\right) z^{-k}\right].$$

2. $\mathcal{Z}-$*трансформација функције x транслиране дуж временске осе за* nT *у позитивном смеру је:*

$$\mathcal{Z}\left\{x\left(t-nT\right)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} x\left[(k-n)T\right] z^{-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} x\left[(k-n)T\right] z^{-k} + \sum_{k=n}^{\infty} x\left[(k-n)T\right] z^{-k}.$$

После увођења смене $k-n=m$ *која даје:*

$$k = 0 \rightarrow m = -n$$

$$k = n-1 \rightarrow m = -1$$

$$k = m \rightarrow m = 0$$

$$k = \infty \rightarrow m = \infty$$

следи да је:

$$\mathcal{Z}\left\{x\left(t-nT\right)\right\} = \overbrace{\sum_{m=-n}^{-1} x\left(mT\right) z^{-(n+m)}}^{=0} + \sum_{m=0}^{\infty} x\left(mT\right) z^{-(m+n)}. \tag{6.7}$$

Прва сума с десне стране израза 6.7 је једнака нули због:

$$x\left(iT\right)=0,\ \forall i<0.\Longrightarrow$$

$$\mathcal{Z}\left\{x\left(t-nT\right)\right\}=z^{-n}\sum_{m=0}^{\infty}x\left(mT\right)z^{-m}=z^{-n}X\left(z\right)$$

на који начин је доказ завршен.

■

Транслација у комплексном домену

Нека је $X\left(s\right)$ комплексни лик (Лапласова трансформација) а $X\left(z\right)$ $\mathcal{Z}-$трансформација временски непрекидног сигнала x:

$$X\left(s\right)=\mathcal{L}^{-}\left\{x\left(t\right)\right\},\ X\left(z\right)=\mathcal{Z}\left\{x\left(t\right)\right\}.$$

Нека је $\mathcal{Z}-$лик функције x добијен на основу њеног комплексног лика $X\left(s\right)$ означен са:

$$\overline{\mathcal{Z}}\left\{X\left(s\right)\right\}=\mathcal{Z}\left\{x\left(t\right)\right\}=X\left(z\right).$$

$\overline{\mathcal{Z}}\left\{X\left(s\right)\right\}$ се одређује тако што се најпре одреди $X^{*}\left(s\right)$ па се онда комплексна променљива s замени са $\frac{1}{T}\ln z$:

$$\overline{\mathcal{Z}}\left\{X\left(s\right)\right\}=\left.X^{*}\left(s\right)\right|_{s=\frac{1}{T}\ln z}.$$

При томе је најпогодније да $X^{*}\left(s\right)$ буде одређено у свом првом облику.

Нека се сада посматра функција $e^{\pm\alpha t}x\left(t\right)$. Комплексни лик ове функције је:

$$\mathcal{L}^{-}\left\{e^{\pm\alpha t}x\left(t\right)\right\}=X\left(s\mp\alpha\right).$$

У том смислу се говори о транслацији у комплексном домену, у односу на аргумент комплексног лика (Лапласове трансформације).

Став 6.6 *Ако је $X\left(z\right)$ $\mathcal{Z}-$трансформација од x онда је $\mathcal{Z}-$трансформација од $e^{\pm\alpha t}x\left(t\right)$ одређена са:*

$$\mathcal{Z}\left\{e^{\pm\alpha t}x\left(t\right)\right\}=X\left(e^{\mp\alpha T}z\right).$$

Доказ.

$$\mathcal{Z}\left\{e^{\pm\alpha t}x\left(t\right)\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{\pm\alpha T}x\left(kT\right)z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}x\left(kT\right)\left(e^{\mp\alpha T}z\right)^{-k}.$$

Уводи се смена $z_1=e^{\mp\alpha T}z\Longrightarrow$

$$\mathcal{Z}\left\{e^{\pm\alpha t}x\left(t\right)\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}x\left(kT\right)z_1^{-k}=X\left(z_1\right)=X\left(e^{\mp\alpha T}z\right).$$

На тај начин доказ је завршен. ■

Z трансформација $n-$те потоње коначне разлике $\Delta^n x(t)$ функције $x(t)$

Став 6.7 *$\mathcal{Z}-$трансформација $n-$те потоње коначне разлике $\Delta^n x(t)$ функције $x(t)$ је одређена са:*

$$\mathcal{Z}\left\{\Delta^n x(t)\right\} = (z-1)^n X(z) - z\sum_{i=0}^{n-1}(z-1)^{n-i-1}\Delta^i x(0).$$

Доказ. Подсећање! *Прва потоња коначна разлика је:*

$$\Delta x(t) = x(t+T) - x(t).$$

Друга потоња коначна разлика је:

$$\Delta^2 x(t) = \Delta\left[\Delta x(t)\right] = \Delta x(t+T) - \Delta x(t) =$$

$$= x(t+2T) - x(t+T) - x(t+T) + x(t) =$$

$$= x(t+2T) - 2x(t+T) + x(t).$$

$\vdots$

$n-$та потоња коначна разлика је:

$$\Delta^n x(t) = \Delta\left[\Delta^{n-1} x(t)\right] = \Delta\left[\Delta\left[\Delta\left[\cdots\left[\Delta x(t)\right]\right]\right]\right].$$

Доказ се спроводи математичком индукцијом.

Нека је $n=1$. Треба показати да Став важи за $n=1$. Тада је:

$$\mathcal{Z}\left\{\Delta x(t)\right\} = \mathcal{Z}\left\{x(t+T)\right\} - \mathcal{Z}\left\{x(t)\right\} =$$

$$= z\left[X(z) - x(0)\right] - X(z) = (z-1)X(z) - zx(0) =$$

$$= (z-1)^1 X(z) - z\sum_{i=0}^{1-1}(z-1)^{1-i-1}\Delta^i x(0)$$

због $\Delta^0 x(0) = x(0)$. Ово показује да Став важи за $n=1$.

Претпоставимо да Став важи за произвољно $n>1$ и тада под тим условом покажимо да Став важи и за $n+1$. Одредимо:

$$\mathcal{Z}\left\{\Delta^{n+1} x(t)\right\} = \mathcal{Z}\left\{\Delta\left[\Delta^n x(t)\right]\right\} = \mathcal{Z}\left\{\Delta^n x(t+T)\right\} - \mathcal{Z}\left\{\Delta^n x(t)\right\} =$$

$$= (z-1)\,\mathcal{Z}\left\{\Delta^n x(t)\right\} - z\Delta^n x(0) \Longrightarrow$$

$$\mathcal{Z}\left\{\Delta^{n+1} x(t)\right\} = (z-1)\left[(z-1)^n X(z) - z\sum_{i=0}^{n-1}(z-1)^{n-i-1}\Delta^i x(0)\right] - z\Delta^n x(0) =$$

$$= (z-1)^{n+1} X(z) - z(z-1)\sum_{i=0}^{n-1}(z-1)^{n-i-1}\Delta^i x(0) - z\Delta^n x(0) =$$

$$= (z-1)^{n+1} X(z) - z\Big[(z-1)^n \Delta^0(0) + (z-1)^{n-1}\Delta^1(0) +$$

$$+ (z-1)^{n-2}\Delta^2(0) + \cdots + (z-1)^1\Delta^{n-1}(0) + (z-1)^0\Delta^n(0)\Big] =$$

$$= (z-1)^{n+1}X(z) - z\sum_{i=0}^{n+1-1}(z-1)^{n+1-i-1}\Delta^i x(0).$$

Ово показује да Став важи и за $n+1$ кад важи за произвољно $n > 1$. На овај начин је математичком индукцијом доказано да Став важи за свако n такво да $n \in \mathcal{N}$. ■

6.3.2 Инверзна Z трансформација

Инверзна $\mathcal{Z}-$трансформација од $X(z)$ у ознаци $\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$ се одређује као:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_G X(z)\, z^{k-1}dz.$$

Овде је G кружница с центром у координатном почетку која обухвата све полове од $X(z)\, z^{k-1}$.

6.3.3 Граничне теореме Z трансформације

Прва гранична теорема

Став 6.8 *Почетна вредност $x(0)$ функције x у тренутку $t = 0$ је одређена са:*

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z).$$

Доказ. *На основу дефиниције $\mathcal{Z}-$трансформације следи:*

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\, z^{-k} = x(0) + \sum_{k=1}^{\infty} x(kT)\, z^{-k}.$$

Ако се потражи гранична вредност и леве и десне стране горње релације када $z \to \infty$ онда се добија:

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = x(0)$$

што доказује Став. ■

Друга гранична теорема

Став 6.9 *Ако функција $(z-1)X(z)$ нема полова на јединичној кружници и ван јединичног круга осим могућег пола $z^* = 1$ и ако постоји гранична вредност*

$$\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$$

онда је

$$\lim_{k\to+\infty} x(kT) = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z).$$

Доказ. *$\mathcal{Z}-$трансформација прве потоње коначне разлике $\Delta x(t)$ функције x је одређена са:*

$$\mathcal{Z}\{\Delta x(t)\} = (z-1)X(z) - zx(0). \tag{6.8}$$

С друге стране по дефиницији је:

$$\mathcal{Z}\{\Delta x(t)\} = \mathcal{Z}\{x(t+T)\} - \mathcal{Z}\{x(t)\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x[(k+1)T]z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \Longrightarrow$$

$$\lim_{z\to 1}\mathcal{Z}\{\Delta x(t)\} = \lim_{z\to 1}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} x[(k+1)T]z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 1}\left\{\lim_{M\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{M} x[(k+1)T]z^{-k} - \sum_{k=0}^{M} x(kT)z^{-k}\right]\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 1}\left\{\lim_{M\to\infty}\left[-x(0) + x(T)\left(1-z^{-1}\right) + x(2T)\left(z^{-1}-z^{-2}\right) + \cdots\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdots + x(MT)\left(z^{-(M-1)} - z^{-M}\right) + x((M+1)T)z^{-M}\right]\right\} =$$

$$= \lim_{M\to\infty}\left\{\lim_{z\to 1}\left[-x(0) + x(T)\overset{=0}{\left(1-z^{-1}\right)} + x(2T)\overset{=0}{\left(z^{-1}-z^{-2}\right)} + \cdots\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdots + x(MT)\overset{=0}{\left(z^{-(M-1)} - z^{-M}\right)} + x((M+1)T)z^{-M}\right]\right\} =$$

$$= \lim_{M\to\infty}\{x[(M+1)T] - x(0)\}.$$

Ако се уведе смена $M+1=k$ следи $M\to\infty \Longrightarrow k\to\infty$. Сада узимајући у обзир израз 6.8 и последњи резултат следи:

$$\lim_{z\to 1}\mathcal{Z}\{\Delta x(t)\} = \lim_{z\to 1}[(z-1)X(z) - zx(0)] =$$

$$= \lim_{z\to 1}(z-1)X(z) - x(0) = \lim_{k\to\infty} x(kT) - x(0) \Longrightarrow$$

$$\lim_{k\to\infty} x(kT) = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z).$$

На тај начин је доказ завршен. ■

6.4 Одређивање дискретног сигнала на основу његове Z трансформације

6.4.1 Примена таблице Z трансформација

Најједноставније одређивање дискретног сигнала је у случајевима када се одговарајући $Z-$лик налази у таблици $\mathcal{Z}-$трансформација.

У извесним сложенијим случајевима могуће је $Z-$лик $X(z)$ рашчланити у збир неколико $Z-$ликова који су таблични случајеви:

$$X(z) = X_1(z) + \cdots + X_m(z) \Longrightarrow$$

$$x(kT) = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{Z}^{-1}\{X_i(z)\}.$$

Разлагање $X(z)$ у суму сабирака који су таблични случајеви се ефикасно изводи ако је $X(z)$ облика:

$$X(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = \frac{P(z)}{Q(z)}. \tag{6.9}$$

У изразу 6.9 $m \leq n$ а такође треба запазити да је $b_0 = 0$ и $a_n = 1$.

Поступак се састоји у следећем:

– Дефинише се функција:

$$\widehat{X}(z) = z^{-1} X(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = \frac{\widehat{P}(z)}{Q(z)}$$

– Функција $\widehat{X}(z)$ се развија у Хевисајдов развој при чему је потребно познавати све полове од $\widehat{X}(z)$ и њихове вишеструкости:

$$Q(z) = (z - z_1^*)^{\nu_1} (z - z_2^*)^{\nu_2} \cdots \left(z - z_\mu^*\right)^{\nu_\mu} \Longrightarrow$$

$$\widehat{X}(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{r=1}^{\nu_i} \frac{c_{ir}}{(z - z_i^*)^r}$$

при чему је:

$$c_{ir} = \begin{cases} c_i = \left. \frac{\widehat{P}(z)}{Q'(z)} \right|_{z=z_i^*,\ \nu_i=1} \\ \\ \left. \frac{1}{(\nu_i - r)!} \frac{d^{\nu_i - r}}{dz^{\nu_i - r}} \left[(z - z_i^*)^{\nu_i} \frac{\widehat{P}(z)}{Q(z)} \right] \right|_{z=z_i^*,\ \nu_i \geq 2} \end{cases}$$

– Сада се одређује развој:

$$X(z) = \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{r=1}^{\nu_i} c_{ir} \frac{z}{(z - z_i^*)^r}$$

– Крајњи резултат је:

$$x(kT) = \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{r=1}^{\nu_i} \left[c_{ir} \frac{1}{(z_i^*)^{r-1}} \frac{k!}{(k-r+1)!\,(k-1)!} (z_i^*)^k \right].$$

6.4.2 Примена инверзне трансформације

На основу израза за инверзну $\mathcal{Z}-$трансформацију следи:

$$x(kT) = \frac{1}{2\pi j}\oint\limits_G X(z)\, z^{k-1} dz$$

где је G кружница са центром у $z = 0$ која обухвата све полове од $X(z)\, z^{k-1}$.

На основу Кошијеве теореме$\Longrightarrow$

$$\oint\limits_G X(z)\, z^{k-1} dz = 2\pi j \sum_i Res\left[X(z)\, z^{k-1}\right]\Big|_{z=z_i^*-\text{ пол од } X(z)} \Longrightarrow$$

$$x(kT) = \sum_i Res\left[X(z)\, z^{k-1}\right]\Big|_{z=z_i^*-\text{ пол од } X(z)}$$

Ако је z_i^* једнострук пол од $X(z)$ и $X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ онда је:

$$Res\left[X(z)\, z^{k-1}\right]\Big|_{z=z_i^*} = \left.\frac{P(z)}{Q'(z)} z^{k-1}\right|_{z=z_i^*}.$$

Ако је z_i^* пол од $X(z)$ вишеструкости $\nu_i \geq 2$ онда је:

$$Res\left[X(z)\, z^{k-1}\right]\Big|_{z=z_i^*} = \frac{1}{(\nu_i - r)!}\frac{d^{\nu_i - r}}{dz^{\nu_i - r}}\left[X(z)\,(z - z_i^*)^{\nu_i}\, z^{k-1}\right]\Big|_{z=z_i^*}.$$

6.4.3 Развијање у степени ред по z^{-1}

Према дефиницији $\mathcal{Z}-$трансформације функције x је:

$$X(z) = x(0) + x(T)\, z^{-1} + x(2T)\, z^{-2} + \cdots + x(kT)\, z^{-k} + \cdots$$

Одавде директно следи:

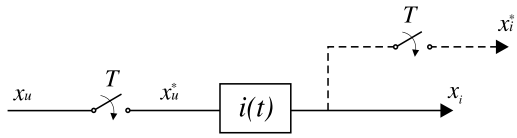
$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

$$x(T) = -\lim_{z\to\infty} z^2 \frac{\partial}{\partial z} X(z)$$

$$x(2T) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to\infty} z^2 \frac{\partial}{\partial z} z^2 \frac{\partial}{\partial z} X(z)$$

$$\vdots$$

$$x(kT) = \frac{(-1)^k}{k!}\lim_{z\to\infty} \underbrace{z^2 \frac{\partial}{\partial z} z^2 \frac{\partial}{\partial z} \cdots z^2 \frac{\partial}{\partial z}}_{k-\text{пута}} X(z).$$



Слика 6.20: Редна веза идеалног одабирача и линеарног стационарног динамичког система чији је јединични импулсни одзив $i(t)$

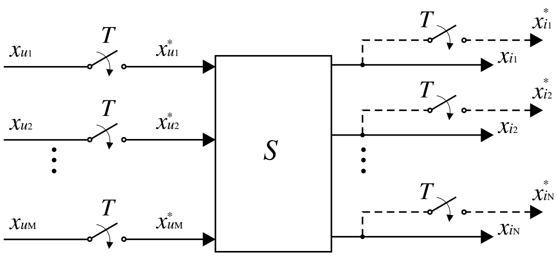
6.5 Z преносна функција и Z преносна матрица

Посматра се редна веза идеалног одабирача и линеарног стационарног једноструко преносног динамичког система чији је јединични импулсни одзив $i(t)$, што је све приказано на слици 6.20.

Дефиниција 6.10 *$Z-$преносна функција дискретног система с једноструким преносом сигнала је однос $\mathcal{Z}-$комплексних ликова његове излазне и улазне величине при свим почетним условима једнаким нули у ознаци $W(z)$: $W(z) = \frac{X_i(z)}{X_u(z)}$.*

$\mathcal{Z}-$лик многих функција је рационална функција тако да је број њених полова и нула ограничен што није случај са њиховим дискретним комплексним ликовима. Због тога је анализа дискретних система много једноставнија у $z-$комплексном домену него у $s-$комплексном домену.

Посматра се вишеструко преносни дискретни систем приказан на слици 6.21.



Слика 6.21: Вишеструко преносни дискретни систем

Нека је:

$$X_{uk}(z) = \mathcal{Z}\{x_{uk}^*(t)\} - \ \mathcal{Z}\text{−трансформација } k-\text{те улазне величине } x_{uk}^*(t),$$

$$X_{ij}(z) = \mathcal{Z}\left\{x_{ij}^*(t)\right\} - \ \mathcal{Z}\text{−трансформација } j-\text{те излазне величине } x_{ij}^*(t).$$

Дефиниција 6.11 *$W_{jk}(z)$ је $Z-$преносна функција вишеструко преносног система са слике 6.21 у односу на његову $j-$ту, $j = 1, 2, \cdots, N$, излазну и $k-$ту, $k = 1, 2, \cdots, M$, улазну величину.*

Дефиниција 6.12 *Матрична функција* $\mathbf{W}$ *типа* $N \times M$, *чији је* $(j,k)-$*ти елемент* $W_{j,k}(z)$ *вишеструко преносног дискретног система са слике 6.21, је* $Z-$ПРЕНОСНА МАТРИЦА *тог истог система:*

$$\mathbf{W}(z) = \begin{bmatrix} W_{11}(z) & W_{12}(z) & \cdots & W_{1M}(z) \\ W_{21}(z) & W_{22}(z) & \cdots & W_{2M}(z) \\ & \vdots & & \\ W_{N1}(z) & W_{N2}(z) & \cdots & W_{NM}(z) \end{bmatrix}.$$

Ако се уведе $\mathcal{Z}-$трансформација $\mathbf{X}_u(z)$ и $\mathbf{X}_i(z)$ вектора улаза $\mathbf{x}_u^*$ и вектора излаза $\mathbf{x}_i^*$ онда при свим почетним условима једнаким нули важи:

$$\mathbf{X}_i(z) = \mathbf{W}(z) \cdot \mathbf{X}_u(z) \Longrightarrow$$

$$\mathbf{x}_i(kT) = \mathcal{Z}^{-1}\{\mathbf{W}(z) \cdot \mathbf{X}_u(z)\}.$$