Поглавље 5

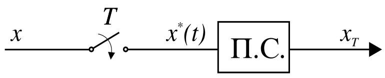
Системи за продужавање трајања сигнала

5.1 Системи за продужавање трајања сигнала нултог реда

Идеални одабирач ствара више хармонике у излазном сигналу $x_i^*(t)$ који су непожељни јер изобличавају информацију о улазном сигналу идеалног одабирача.

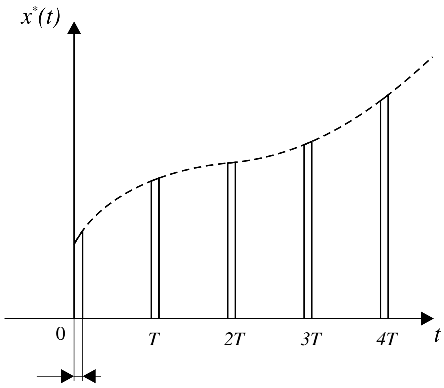
Пошто је интервал одабирања мали у односу на периоду одабирања, $\psi \ll T$, то је пренета енергија кроз идеални одабирач врло мала. Да би се повећала енергија која се преноси кроз идеални одабирач на његовом излазу се везује на ред СИСТЕМ ЗА ПРОДУЖАВАЊЕ ТРАЈАЊА СИГНАЛА који је сада подсистем −преносни орган (ПС) у односу на цео систем.

На слици 5.1 приказана је редна веза идеалног одабирача и продуживача трајања сигнал нултог реда.



Слика 5.1: Редна веза идеалног одабирача и продуживача трајања сигнала нултог реда

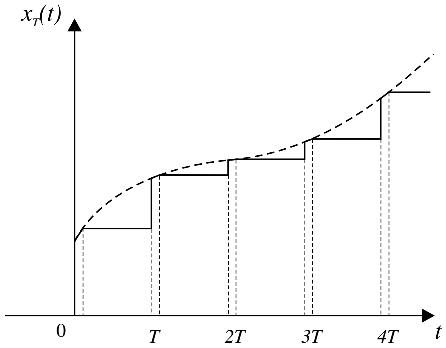
За произвољан улазни сигнал идеалног одабирача на слици 5.2 приказан је временски дискретизован сигнал тог улазног сигнала а на слици 5.3 приказан је сигнал $x_T(t)$ на излазу продуживача трајања сигнала нултог реда.



Слика 5.2: Временски дискретизован сигнал произвољног улазног сигнала идеалног одабирача

Са слике 5.3 јасно се види да овај систем ради тако да је његов излазни сигнал $x_T(t)$ на интервалу између два тренутка одабирања једнак вредности улазног сигнала идеалног одабирача у претходном тренутку одабирања:

$$x_T(t) = x(kT) \quad \forall t \in \,]kT, (k+1)T[\Longrightarrow$$



Слика 5.3: Сигнал $x_T\left(t\right)$ на излазу продуживача трајања сигнала нултог реда

$$x_T\left(t\right)=\sum_{k=0}^{\infty}x\left(kT\right)\left\{h\left(t-kT\right)-h\left[t-\left(k+1\right)T\right]\right\}.$$

5.1.1 Преносна функција

Лапласова трансформација излазног сигнала продуживача трајања сигнала нултог реда је:

$$X_T\left(s\right)=\mathcal{L}\left\{x_T\left(t\right)\right\}=\mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}x\left(kT\right)\left\{h\left(t-kT\right)-h\left[t-\left(k+1\right)T\right]\right\}\right\}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}x\left(kT\right)\left\{\mathcal{L}\left\{h\left(t-kT\right)\right\}-\mathcal{L}\left\{h\left[t-\left(k+1\right)T\right]\right\}\right\}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}x\left(kT\right)\left[\frac{e^{-kTs}}{s}-\frac{e^{-(k+1)Ts}}{s}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}x\left(kT\right)e^{-kTs}\cdot\frac{1-e^{-Ts}}{s}=$$

$$=\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}x\left(kT\right)e^{-kTs}\Longrightarrow$$

$$X_T\left(s\right)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}X^*\left(s\right).$$

Нека је преносна функција система за продужавање трајања сигнала означена са $W_T\left(s\right)$. По дефиницији је:

$$W_T\left(s\right)=\frac{X_T\left(s\right)}{X^*\left(s\right)}\Longrightarrow$$

$$X_T\left(s\right)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot X^*\left(s\right)=W_T\left(s\right)\cdot X^*\left(s\right)\Longrightarrow$$

$$W_T\left(s\right)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}.$$

5.1.2 Фреквентна карактеристика

Формалним замењивањем s са $j\omega$ у изразу за преносну функцију продуживача трајања сигнала нултог реда добија се његова фреквентна карактеристика:

$$F_T(j\omega) = \frac{1-e^{-jT\omega}}{j\omega} = \frac{\sin T\omega}{\omega} + j\frac{\cos T\omega - 1}{\omega} \Longrightarrow$$

$$A_T(\omega) = \sqrt{\left(\frac{\sin T\omega}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{\cos T\omega - 1}{\omega}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{|\omega|}\sqrt{\sin^2 T\omega + \cos^2 T\omega + 1 - 2\cos T\omega} =$$

$$= \frac{1}{|\omega|}\sqrt{2(1-\cos T\omega)} = \frac{1}{\omega}\sqrt{4\sin^2\frac{T\omega}{2}} =$$

$$= \frac{2}{|\omega|}\left|\sin\frac{T\omega}{2}\right| = T\frac{\left|\sin\frac{T\omega}{2}\right|}{\frac{T|\omega|}{2}}$$

$$\varphi_T(\omega) = \arctan\frac{\frac{\cos T\omega - 1}{\omega}}{\frac{\sin T\omega}{\omega}} = \arctan\frac{-2\sin^2\frac{T\omega}{2}}{2\sin\frac{T\omega}{2}\cos\frac{T\omega}{2}} =$$

$$= \arctan\left(-\tan\frac{T\omega}{2}\right) = -\frac{T\omega}{2} = -\frac{\pi\omega}{\omega_0} \Longrightarrow$$

Коначно, амплитудна фреквентна и фазна фреквентна карактеристика продуживача трајања сигнала нултог реда су:

$$A_T(\omega) = 2\frac{\left|\sin\frac{\pi\omega}{\omega_0}\right|}{|\omega|} \tag{5.1}$$

$$\varphi_T(\omega) = -\frac{\pi\omega}{\omega_0} \tag{5.2}$$

На основу израза за амплитудну и фазну фреквентну карактеристику одређује се израз за фреквентну карактеристику продуживача трајања сигнала нултог реда:

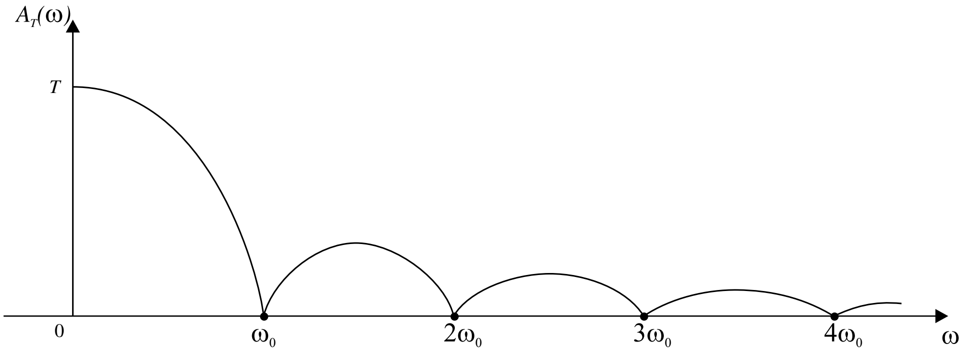
$$F_T(j\omega) = 2\frac{\left|\sin\frac{\pi\omega}{\omega_0}\right|}{|\omega|}\cdot e^{-j\frac{\pi\omega}{\omega_0}}$$

На основу израза 5.1 може се одредити график те карактеристике што је приказано на слици 5.4.

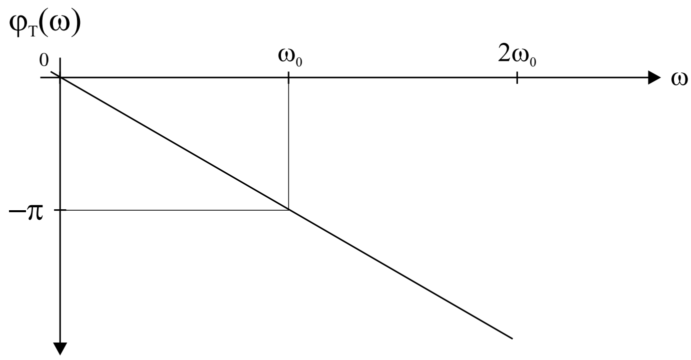
Са дијаграма $(\omega, A_T(\omega))$ види се да систем за продужавање трајања сигнала нултог реда има особину ниско пропусног пригушивача.

Енергија која се преноси сигналом $x_T(t)$ у односу на енергију која се преноси сигналом $x^*(t)$ је повећана и то у односу $\frac{T}{\psi}$.

На основу израза 5.2 може се одредити график те карактеристике што је приказано на слици 5.5.



Слика 5.4: Амплитудна фреквентна карактеристика продуживача трајања сигнала нултог реда



Слика 5.5: Фазна фреквентна карактеристика продуживача трајања сигнала нултог реда

5.2 Системи за продужавање трајања сигнала првог реда

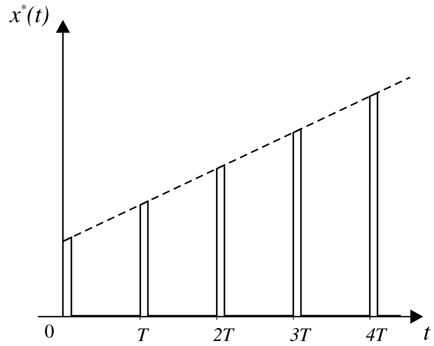
За произвољан улазни сигнал идеалног одабирача на слици 5.6 приказан је временски дискретизован сигнал тог улазног сигнала а на слици 5.7 приказан је сигнал $x_T(t)$ на излазу продуживача трајања сигнала првог реда.

Са слике 5.7 види се да овај систем ради тако да је његов излазни сигнал $x_T(t)$ у тренуцима одабирања једнак дискретној његовој улазној величини

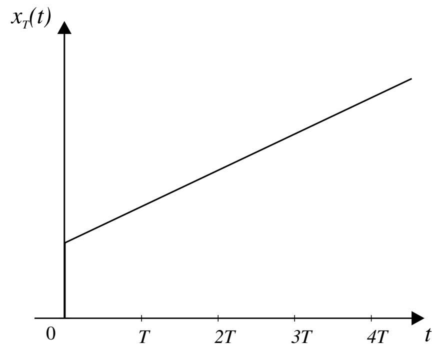
$$x_T(kT) = x^*(kT)$$

а између тренутака одабирања дискретној његовој улазној величини у претходном тренутку одабирања увећаној сразмерно разлици вредности дискретне величине x^* у претходна два тренутка одабирања:

$$x_T(t) = x(kT) + \frac{x(kT) - x[(k-1)T]}{T}(t - kT), \quad \forall t \in]kT, (k+1)T[\Longrightarrow$$



Слика 5.6: Временски дискретизован сигнал произвољног улазног сигнала идеалног одабирача



Слика 5.7: Сигнал $x_T\left(t\right)$ на излазу продуживача трајања сигнала првог реда

Излазни сигнал продуживача трајања сигнала првог реда у затвореној форми је:

$$x_T\left(t\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{x\left(kT\right)+\frac{x\left(kT\right)-x\left[\left(k-1\right)T\right]}{T}\left(t-kT\right)\right\}\left\{h\left(t-kT\right)-h\left[t-\left(k+1\right)T\right]\right\}$$

5.2.1 Преносна функција

Лапласова трансформација излазног сигнала продуживача трајања сигнала првог реда је:

$$X_T\left(s\right)=\mathcal{L}^{-}\left\{x_T\left(t\right)\right\}=\mathcal{L}^{-}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left\{x\left(kT\right)+\frac{x\left(kT\right)-x\left[\left(k-1\right)T\right]}{T}\left(t-kT\right)\right\}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left\{h\left(t-kT\right)-h\left[t-\left(k+1\right)T\right]\right\}\right\}$$

Користећи особину линеарности Лапласовог оператора следи да је:

$$\mathcal{L}^- \{x_T(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\, \mathcal{L}^- \{h(t-kT) - h[t-(k+1)T]\} +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x(kT) - x[(k-1)T]}{T} \mathcal{L}^- \{(t-kT)\{h(t-kT) - h[t-(k+1)T]\}\}$$

Прво се одређује Лапласова трансформација разлике јединичних одскочних функција са кашњењем:

$$\mathcal{L}^- \{h(t-kT) - h[t-(k+1)T]\} = \mathcal{L}^- \{h(t-kT)\} - \mathcal{L}^- \{h[t-(k+1)T]\} =$$

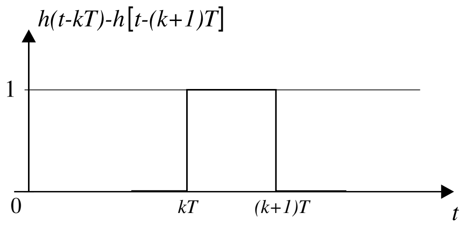
$$= \frac{1}{s}e^{-kTs} - \frac{1}{s}e^{-(k+1)Ts} = \frac{1-e^{-Ts}}{s}e^{-kTs}$$

а потом

$$\mathcal{L}^- \{(t-kT)\{h(t-kT) - h[t-(k+1)T]\}\} =$$

$$= \int_{0^-}^{\infty} (t-kT)\{h(t-kT) - h[t-(k+1)T]\}\, e^{-st} dt.$$

На слици 5.8 је приказана функција која претставља разлику јединичних одскочних функција са кашњењем kT и $(k+1)T$.



Слика 5.8: Разлика јединичних одскочних функција са кашњењем kT и $(k+1)T$

Аналитички израз за ову функцију је:

$$h(t-kT) - h[t-(k+1)T] = \begin{cases} 0, t \in [0, kT[\\ 1, t \in]kT, (k+1)T[\\ 0, t \in](k+1)T, \infty[\end{cases}.$$

Имајући у виду да је поменута функција различита од нуле само на интервалу $]kT, (k+1)T[$, следи да је:

$$\mathcal{L}^- \{(t-kT)\{h(t-kT) - h[t-(k+1)T]\}\} =$$

$$= \int_{kT^-}^{(k+1)T} (t-kT)\{h(t-kT) - \overset{=1}{h}[t-(k+1)T]\}e^{-st} dt.$$

После увођења смене $\tau = t - kT \Longrightarrow$

$$t = kT \longrightarrow \tau = 0$$

$$t = (k+1)\,T \longrightarrow \tau = T$$

$$t = \tau + kT \longrightarrow dt = d\tau \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}^{-}\left\{(t-kT)\left\{h\,(t-kT) - h\,[t-(k+1)\,T]\right\}\right\} =$$

$$= \int\limits_{0^-}^{T} \tau e^{-\tau s} e^{-kTs} d\tau = e^{-kTs} \int\limits_{0^-}^{T} \tau e^{-\tau s} d\tau = e^{-kTs} \int\limits_{0^-}^{T} -\frac{\tau}{s} d\left(e^{-s\tau}\right) =$$

$$= -\frac{e^{-kTs}}{s} \int\limits_{0^-}^{T} \tau d\left(e^{-s\tau}\right). \tag{5.3}$$

Овај интеграл се решава *парцијалном интеграцијом.*

Дигресија 5.1 *Парцијална интеграција се састоји у следећем:*

$$\int\limits_{0^-}^{T} u dv = uv|_{0^-}^{T} - \int\limits_{0^-}^{T} v du.$$

Ако се у изразу 5.3 стави да је $\tau = u$ и $e^{-s\tau} = v$ и парцијално интеграли горњи интеграл добија се:

$$\mathcal{L}^{-}\left\{(t-kT)\left\{h\,(t-kT) - h\,[t-(k+1)\,T]\right\}\right\} =$$

$$= -\frac{e^{-kTs}}{s}\left[\tau e^{-s\tau}\Big|_{0^-}^{T} - \int\limits_{0^-}^{T} e^{-s\tau} d\tau\right] = -\frac{e^{-kTs}}{s}\left(Te^{-Ts} + \frac{1}{s} e^{-\tau s}\Big|_{0^-}^{T}\right) =$$

$$= -\frac{e^{-kTs}}{s}\left(Te^{-Ts} + \frac{1}{s}e^{-Ts} - \frac{1}{s}\right) = -\frac{e^{-kTs}}{s}\left(-\frac{1-e^{-Ts}}{s} + Te^{-Ts}\right) =$$

$$= \frac{e^{-kTs}}{s}\left(\frac{1-e^{-Ts}}{s} - Te^{-Ts}\right).$$

Коначно је:

$$X_T\,(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x\,(kT)\, e^{-kTs} \frac{1-e^{-Ts}}{s} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x\,(kT) - x\,[(k-1)\,T]}{T} \frac{e^{-kTs}}{s}\left(\frac{1-e^{-Ts}}{s} - Te^{-Ts}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x\,(kT)\,\frac{e^{-kTs}}{s}\left[\left(1-e^{-Ts}\right)\left(1+\frac{1}{Ts}\right) - e^{-Ts}\right] -$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty} x\left[(k-1)T\right]\frac{e^{-kTs}}{Ts}\left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}-Te^{-Ts}\right).$$

У другој суми последњег израза може да се изврши смена $k-1=m$ тако да $\Longrightarrow$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x\left[(k-1)T\right]\frac{e^{-kTs}}{Ts}\left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}-Te^{-Ts}\right)=$$

$$=\sum_{m=-1}^{\infty} x\left(mT\right)\frac{e^{-mTs}}{Ts}e^{-Ts}\left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}-Te^{-Ts}\right)$$

и због $x\left(mT\right)=0\ \forall m<0$

$$=\sum_{m=0}^{\infty} x\left(mT\right)\frac{e^{-mTs}}{Ts}e^{-Ts}\left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}-Te^{-Ts}\right).$$

Ако се у последњој суми уместо m употреби k и са том изменом она уврсти у израз за Лапласову трансформацију излазног сигнала продуживача трајања сигнала првог реда добија се:

$$X_T\left(s\right)=\sum_{k=0}^{\infty} x\left(kT\right)\frac{e^{-kTs}}{s}\left[\left(1-e^{-Ts}\right)\left(1+\frac{1}{Ts}\right)-e^{-Ts}\right]-$$
$$-\sum_{k=0}^{\infty} x\left(kT\right)\frac{e^{-kTs}}{Ts}e^{-Ts}\left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}-Te^{-Ts}\right). \tag{5.4}$$

Када се у изразу 5.4 обе суме споје у једну добија се:

$$X_T\left(s\right)=\sum_{k=0}^{\infty} x\left(kT\right)\frac{e^{-kTs}}{s}\left[\left(1-e^{-Ts}\right)\left(1+\frac{1}{Ts}\right)-e^{-Ts}-\frac{e^{-Ts}}{Ts}\left(1-e^{-Ts}\right)+e^{-2Ts}\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} x\left(kT\right)\frac{e^{-kTs}}{s}\left[\left(1-e^{-Ts}\right)\left(1+\frac{1}{Ts}-e^{-Ts}-\frac{e^{-Ts}}{Ts}\right)\right]=$$

$$=\left(1-e^{-Ts}\right)^2\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{Ts^2}\right)\sum_{k=0}^{\infty} x\left(kT\right)e^{-kTs}\Longrightarrow$$

$$X_T\left(s\right)=\left(1-e^{-Ts}\right)^2\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{Ts^2}\right)X^*\left(s\right). \tag{5.5}$$

Имајући у виду дефиницију преносне функције продуживача трајања сигнала првог реда:

$$W_T\left(s\right)=\frac{X_T\left(s\right)}{X^*\left(s\right)}\Longrightarrow$$
$$X_T\left(s\right)=W_T\left(s\right)X^*\left(s\right)$$

што заједно са изразом 5.5 повлачи да је:

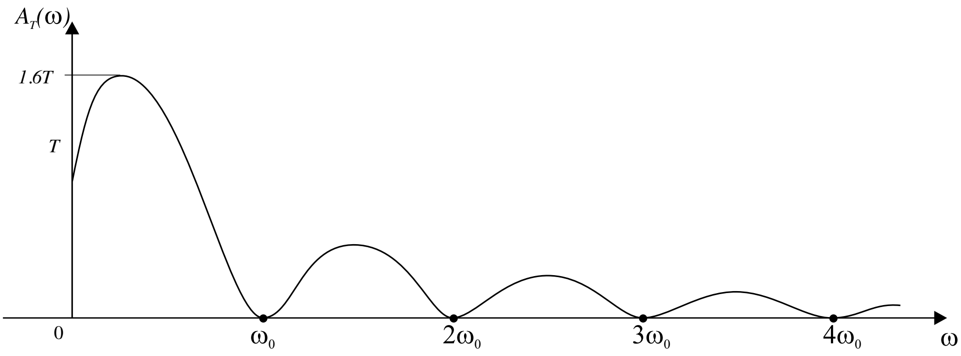
$$W_T\left(s\right)=\left(1-e^{-Ts}\right)^2\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{Ts^2}\right)$$

5.2.2 Фреквентна карактеристика

Формалном заменом s са $j\omega$ у изразу за преносну функцију добија се фреквентна карактеристика продуживача трајања сигнала нултог реда:

$$F_T\left(j\omega\right) = \left(1 - e^{-jT\omega}\right)^2 \left(\frac{1}{j\omega} - \frac{1}{T\omega^2}\right) = \left(1 - e^{-jT\omega}\right)^2 \left(-\frac{1 + jT\omega}{T\omega^2}\right).$$

На слици 5.9 приказана је амплитудна фреквентна карактеристика продуживача трајања сигнала првог реда.



Слика 5.9: Амплитудна фреквентна карактеристика продуживача трајања сигнала првог реда

Са дијаграма на слици 5.9 види се да систем за продужавање трајања сигнала првог реда има такође особину ниско пропусног пригушивача као и продуживач трајања сигнала нултог реда.