Поглавље 2

Додатак четвртој лекцији

2.1 Хевисајдов развој функције $X(s)$

Поставља се питање како се одређује оригинал функције ако је позната њена Лапласова трансформација?

$$X(s) \longrightarrow x(t)?$$

При томе је $X(s)$ реална рационална функција.

Дефиниција 2.1 *За функцију $X(s)$ се каже да је реална рационална функција акко је:*

1. $$X(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$$

   где су $p(s)$ и $q(s)$ полиноми по s,

2. *за сваку реалну вредност броја s, $X(s)$ је такође реално:*

   $$s = \sigma \in \Re \Longrightarrow X(s) \in \Re.$$

   Нека су:

   $$p(s) = \sum_{k=0}^{m} b_k s^k; q(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k s^k; m \leq n.$$

2.1.1 Нуле функције $X(s)$

Дефиниција 2.2 *Број s је ограничена нула $r-$тог реда функције $X(s)$ у ознаци s^0 акко је тај број s нула $r-$тог реда полинома $p(s)$ у бројиоцу функције $X(s)$. Ако функција $X(s)$ има више ограничених нула нпр. M оне се означавају са: s_1^0, s_2^0, $\cdots$, s_M^0. Вишеструкост $k-$те нуле се означава са ν_k^0 тако да је:*

$$\nu_1^0 + \nu_2^0 + \cdots + \nu_M^0 = m.$$

2.1.2 Полови функције $X(s)$

Дефиниција 2.3 *Број s је ограничени пол $r-$тог реда функције $X(s)$ у ознаци s^* акко је тај број s нула $r-$тог реда полинома $q(s)$ у имениоцу функције $X(s)$. Ако функција $X(s)$ има више ограничених полова нпр. μ они се означавају са: s_1^*, s_2^*, $\cdots$, s_μ^*. Вишеструкост $k-$тог пола се означава са ν_k^* тако да је:*

$$\nu_1^* + \nu_2^* + \cdots + \nu_\mu^* = n.$$

2.1.3 Хевисајдов развој функције $X(s)$

Нека је по претпоставци:

$$n \geq m$$

и

$$\nu_k^* = \begin{cases} 1, & k \neq i \\ \geq 2, & k = i \end{cases}.$$

Тада је:

$$X(s) = R_0 + \frac{R_1}{s - s_1^*} + \cdots + \frac{R_{i-1}}{s - s_{i-1}^*} + \frac{R_{i+1}}{s - s_{i+1}^*} + \cdots + \frac{R_\mu}{s - s_\mu^*} + \tag{2.1}$$

$$+ \frac{R_{i1}}{s - s_i^*} + \frac{R_{i2}}{(s - s_i^*)^2} + \cdots + \frac{R_{i\nu_i^*}}{(s - s_i^*)^{\nu_i^*}}$$

Хевисајдов развој функције $X(s)$ у њеним половима, који је потпуно одређен са s_k^*, ν_k^*, R_k и R_{ij}.

У изразу 2.1 s_k^* и ν_k^* су полови функције $X(s)$ који се добијају решавањем једначине:

$$q(s) = 0$$

и њихове вишеструкости.

Такође, у изразу 2.1 R_0, R_k, и R_{i1} су **резидијуми (остаци)** функције $X(s)$ у њеним половима, $+\infty$, једноструким и вишеструком. При томе је:

$$R_0 = X(+\infty),$$

$$R_k = \left. \frac{p(s)}{q'(s)} \right|_{s = s_k^*,\ \nu_k^* = 1},$$

$$R_{ij} = \frac{1}{(\nu_i^* - j)!} \frac{d^{\nu_i^* - j}}{ds^{\nu_i^* - j}} \left[(s - s_i^*)^{\nu_i^*} X(s) \right] \Bigg|_{s = s_i^*,\ \nu_i^* \geq 2}. \tag{2.2}$$

Очигледно, на основу израза 2.2 резидијум R_{i1} у $i-$ том вишеструком полу је:

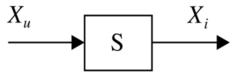
$$R_{i1} = \frac{1}{(\nu_i^* - 1)!} \frac{d^{\nu_i^* - 1}}{ds^{\nu_i^* - 1}} \left[(s - s_i^*)^{\nu_i^*} X(s) \right] \Bigg|_{s = s_i^*,\ \nu_i^* \geq 2}.$$

Сваки сабирак Хевисајдовог развоја је таблични случај, тако да се добија оригинал:

$$x(t) = R_0 \delta(t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{\mu} R_k e^{s_k^* t} h(t) + \sum_{j=1}^{\nu_i^*} \frac{R_{ij} t^{j-1}}{(j-1)!} e^{s_i^* t} h(t).$$

2.1.4 Диференцијална једначина понашања као један облик математичког модела

Посматра се једноструко преносни систем S (који има само једну улазну и једну излазну величину) чији је дијаграм представљен на слици 2.1.



Слика 2.1: Једноструко преносни систем S

Систем S је такав да је његово понашање математички описано скаларном обичном линеарном диференцијалном једначином са константним коефицијентима (скалари a_k и b_k), компактно:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k X_i^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k X_u^{(k)}(t) \tag{2.3}$$

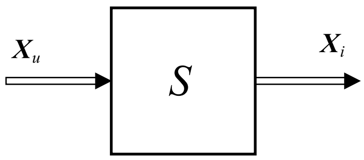
или у развијеном облику:

$$a_n X_i^{(n)}(t) + a_{n-1} X_i^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \dot{X}_i(t) + a_0 X_i(t) =$$

$$= b_0 X_u(t) + b_1 \dot{X}_u(t) + \cdots + b_m X_u^{(m)}(t)$$

која се назива **скаларна диференцијална једначна понашања.**

Слично, на слици 2.2 приказан је вишеструко преносни систем S (укупан збир његових улазних и излазних величина је већи или једнак три, $M + N \geq 3$).



Слика 2.2: Дијаграм вишеструкопреносног система S

Систем S са слике 2.2 је такав да је његово понашање математички описано векторском обичном линеарном диференцијалном једначином са константним коефицијентима (матрице A_k и B_k), компактно:

$$\sum_{k=0}^{l} A_k \mathbf{X}_i^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} B_k \mathbf{X}_u^{(k)}(t) \tag{2.4}$$

или у развијеном облику:

$$A_l \mathbf{X}_i^{(l)}(t) + A_{l-1} \mathbf{X}_i^{(l-1)}(t) + \cdots + A_1 \dot{\mathbf{X}}_i(t) + A_0 \mathbf{X}_i(t) =$$

$$= B_0 \mathbf{X}_u(t) + B_1 \dot{\mathbf{X}}_u(t) + \cdots + B_m \mathbf{X}_u^{(m)}(t)$$

где је:

$$A_k \in \Re^{N \times N},\ \forall k = 0, 1, \cdots, l;\ B_k \in \Re^{N \times M},\ \forall k = 0, 1, \cdots, m;\ \mathbf{X}_u \in \Re^{M};\ \mathbf{X}_i \in \Re^{N}$$

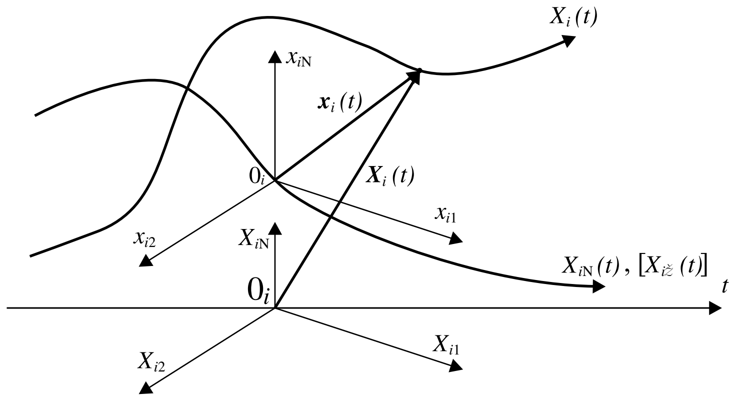
која се назива **векторска диференцијална једначина понашања.**

У једначинама 2.3 и 2.4 велика слова означавају тоталне вредности одговарајућих промењивих величина (улазних, излазних, улаза и излаза).

2.1.5 Стварна динамичка понашања и номинално (жељено) динамичко понашање система

Уобичајено је да се за систем уопште, као на пример на слици 2.2 прописано, задано динамичко понашање назива **номинално динамичко понашање** и оно се изражава са $\mathbf{X}_{iN}(t)$. Ако је посматрани систем објект управљања (O) онда се прописано, задано динамичко понашање назива **жељено динамичко понашање** и оно се изражава са $\mathbf{X}_{i\check{z}}(t)$.

На слици 2.3 приказано је стварно и номинално динамичко понашање за систем S са слике 2.2 са различитим координатним системима у којима се ова динамичка понашања посматрају.



Слика 2.3: Стварно и номинално динамичко понашање система S

На слици 2.3 координатни систем $(0_i, X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{iN})$ је тзв. **тотални координатни систем** који је везан за временску осу и у коме се све величине представљају својим тоталним вредностима а означавају великим словима. На истој слици приказан је и координатни систем $(0_i, x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{iN})$ који је везан за **номинално динамичко понашање тј. жељено динамичко понашање** у случају када је систем S објект управљања O и у коме се све величине представљају својим одступањима а означавају малим словима. Веза између тоталних координата система и одступаја је позната од раније а дефинисана тз. Љапуновљевом трансформацијом координата:

$$\mathbf{x}_u = \mathbf{X}_u - \mathbf{X}_{uN} \tag{2.5}$$

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{iN}. \tag{2.6}$$

2.5 и 2.6 $\Longrightarrow$

$$\mathbf{x}_u = 0_u \Longleftrightarrow \mathbf{X}_u = \mathbf{X}_{uN}$$
$$\mathbf{x}_i = 0_i \Longleftrightarrow \mathbf{X}_i = \mathbf{X}_{iN}.$$

Једначина 2.4 важи и за номинални радни режим и гласи:

$$\sum_{k=0}^{l} A_k \mathbf{X}_{iN}^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} B_k \mathbf{X}_{uN}^{(k)}(t). \tag{2.7}$$

На основу 2.4 и 2.7 следи:

$$\sum_{k=0}^{l} A_k \left[\mathbf{X}_i(t) - \mathbf{X}_{iN}(t)\right]^{(k)} = \sum_{k=0}^{m} B_k \left[\mathbf{X}_u(t) - \mathbf{X}_{uN}(t)\right]^{(k)}. \tag{2.8}$$

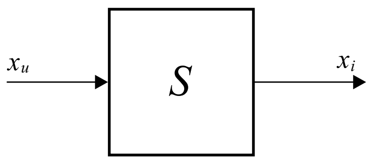
На основу 2.5, 2.6 и 2.8 добија се векторска диференцијална једначина понашања по одступањима:

$$\sum_{k=0}^{l} A_k \mathbf{x}_i^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} B_k \mathbf{x}_u^{(k)}(t). \tag{2.9}$$

Упоређујући 2.4 и 2.9 закључује се да при преласку са тоталних координата на одступања векторска диференцијална једначина понашања задржава исти облик, исти ред и исте коефицијенте.

2.2 Преносна функција и преносна матрица система

На слици 2.4 приказан је дијаграм једноструко преносног система S. Претпоставка је да су улазна и излазна величина изражене у одступањима.



Слика 2.4: Дијаграм једноструко преносног система S

Дефиниција 2.4 *Преносна функција система S у ознаци $W(s)$ је количник левих Лапласових трансформација његове излазне величине $x_i(t)$ и његове улазне величине $x_u(t)$ при свим почетним условима једнаким нули:*

$$W(s) = \frac{\mathcal{L}^{-}\{x_i(t)\}}{\mathcal{L}^{-}\{x_u(t)\}} = \frac{X_i^{-}(s)}{X_u^{-}(s)} \tag{2.10}$$

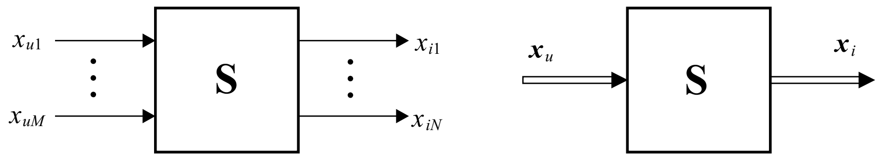
$$x_i^{(k)} = 0, \forall k = 0, 1, \cdots, n-1; \; x_u^{(k)} = 0, \forall k = 0, 1, \cdots, m-1.$$

Из израза 2.10 $\Longrightarrow$

$$X_i^{-}(s) = W(s)\, X_u^{-}(s)$$

при свим почетним условима једнаким нули.

На слици 2.5 приказани су дијаграми вишеструко преносног система **S** на два начина, један на коме су детаљно приказане све улазне и излазне



Слика 2.5: Детаљан и компактан дијаграм система S где су све улазно излазне величине исказане преко одступања

величине појединачно, и други компактан где су улаз и излаз приказани у виду двоструких стрелица. Претпоставка је да су све улазне и излазне величине изражене у одступањима.

Свака улазна величина делује, у оштем случају, на сваку излазну величину.

Дефиниција 2.5 *$W_{jk}(s)$ је $(j,k)-$та парцијална преносна функција система* **S** *у односу на његову $j-$ту излазну величину $x_{ij}(t)$ и његову $k-$ту улазну величину $x_{uk}(t)$:*

$$W_{jk}(s) = \frac{X_{ij}^{-}(s)}{X_{uk}^{-}(s)}, \text{ при свим почетним условима једнаким нули } \Longrightarrow$$

$$X_{ij}^{-}(s) = W_{jk}(s) X_{uk}^{-}(s)\,;\ \forall j = 1, 2, \cdots, N;\ \forall k = 1, 2, \cdots, M. \qquad (2.11)$$

Очигледно, посматрани систем **S** са слике 2.5 има $N \times M$ парцијалних преносних функција.

Дефиниција 2.6 Преносна матрица система S *је $N \times M$ матрична функција чији је $(j,k)-$ти елемент његова $(j,k)-$та преносна функција $W_{jk}(s)$ и означава се са* $\mathbf{W}(s)$*:*

$$\mathbf{W}(s) = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & \cdots & W_{1M}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & \cdots & W_{2M}(s) \\ \vdots & & & \\ W_{N1}(s) & W_{N2}(s) & & W_{NM}(s) \end{bmatrix}. \qquad (2.12)$$

На основу израза 2.11 и 2.12 следи:

$$\mathbf{X}_i^{-}(s) = \mathbf{W}(s)\,\mathbf{X}_u^{-}(s)$$

при свим почетним условима једнаким нули.

2.2.1 Одзив система применом Лапласове трансформације на једначину понашања

Нека је скаларна диференцијална једначина понашања једноструко преносног система исказана преко одступања:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k x_u^{(k)}(t)\,. \qquad (2.13)$$

Применом Лапласове трансформације на леву и десну страну ове једначине добија се:

$$\mathcal{L}^{-}\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^{(k)}(t)\right\} = \mathcal{L}^{-}\left\{\sum_{k=0}^{m} b_k x_u^{(k)}(t)\right\}.$$

На основу особине линеарности Лапласовог оператора следи:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \mathcal{L}^{-}\left\{x_i^{(k)}(t)\right\} = \sum_{k=0}^{m} b_k \mathcal{L}^{-}\left\{x_u^{(k)}(t)\right\}.$$

Даље, на основу Лапласове трансформације $k-$тог извода функције при свим почетним условима једнаким нули, следи:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k s^k X_i^{-}(s) = \sum_{k=0}^{m} b_k s^k X_u^{-}(s).$$

У претходном изразу $X_i(s)$ и $X_u(s)$ могу да се као чиниоци извуку испред сума:

$$X_i^{-}(s)\sum_{k=0}^{n} a_k s^k = X_u^{-}(s)\sum_{k=0}^{m} b_k s^k \Longrightarrow$$

$$X_i^{-}(s) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m} b_k s^k}{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k s^k} X_u^{-}(s) \Longrightarrow$$

$$W(s) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m} b_k s^k}{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k s^k}. \tag{2.14}$$

Слично, применом Лапласове трансформације на једначину 2.9 добија се:

$$\mathcal{L}^{-}\left\{\sum_{k=0}^{l} A_k \mathbf{x}_i^{(k)}(t)\right\} = \mathcal{L}^{-}\left\{\sum_{k=0}^{m} B_k \mathbf{x}_u^{(k)}(t)\right\} \Longrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{l} A_k \mathcal{L}^{-}\left\{\mathbf{x}_i^{(k)}(t)\right\} = \sum_{k=0}^{m} B_k \mathcal{L}^{-}\left\{\mathbf{x}_u^{(k)}(t)\right\} \Longrightarrow$$

$$\left(\sum_{k=0}^{l} A_k s^k\right)\mathbf{X}_i^{-}(s) = \left(\sum_{k=0}^{m} B_k s^k\right)\mathbf{X}_u^{-}(s)$$

при свим почетним условима једнаким нули

$$\mathbf{X}_i^{-}(s) = \left(\sum_{k=0}^{l} A_k s^k\right)^{-1}\left(\sum_{k=0}^{m} B_k s^k\right)\mathbf{X}_u^{-}(s) \Longrightarrow$$

$$\mathbf{W}(s) = \left(\sum_{k=0}^{l} A_k s^k\right)^{-1} \left(\sum_{k=0}^{m} B_k s^k\right). \tag{2.15}$$

На основу израза 2.14 и 2.15 види се да како преносна функција тако и преносна матрица не зависе од улазних и излазних величина, односно улаза и излаза (њихових Лапласових трансформација) већ само од коефицијената a_k, b_k односно A_k, B_k. Преносна функција система $W(s)$ односно преносна матрица система $\mathbf{W}(s)$ су облик математичког модела система који у себи садржи информације о особинама система.

2.2.2 Физичко тумачење преносне функције и преносне матрице система

Имајући у виду да је:

$$X_i^-(s) = W(s)\, X_u^-(s) \Longrightarrow$$

1. Преносна функција система описује у комплексном домену комплексног броја s, закон по коме систем дејство улазне величине преноси на излазну величину у току времена.

2. $x_u(t) = \delta(t) \Longrightarrow x_i(t) = i(t) \Longrightarrow$
   $X_u^-(s) = 1,\ \mathcal{L}^-\{i(t)\} = I^-(s) \Longrightarrow$
   $I^-(s) = W(s) \cdot 1 \Longrightarrow$
   $$W(s) = \mathcal{L}^-\{i(t)\}$$
   тј. **преносна функција система је лева Лапласова трансформација његовог јединичног импулсног одзива при свим почетним условима једнаким нули.**

2.3 Фреквентна карактеристика и фреквентна матрица система

2.3.1 Фуријеова трансформација

Дефиниција 2.7 Фуријеова трансформација *функције* $x(t)$ *у ознаци* $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega)$ *је несвојствени интеграл:*

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

уколико он постоји. Имајући у виду да за функцију $x(t)$ *важи да је:*

$$x(t) = 0, \forall t < 0 \Longrightarrow$$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{0}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt.$$

Став 2.8 *Фуријеова трансформација је линеаран оператор:*

$$\mathcal{F}\left\{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\right\} = \alpha_1 \mathcal{F}\left\{x_1(t)\right\} + \alpha_2 \mathcal{F}\left\{x_2(t)\right\}.$$

Став 2.9 *Ако је функција $x(t)$ дефинисана, непрекидна и $k-$пута диференцијабилна и ако су сви почетни услови једнаки нули онда је Фуријеова трансформација $k-$тог извода функције $x(t)$ одређена са:*

$$\mathcal{F}\left\{x^{(k)}(t)\right\} = (j\omega)^k \mathcal{F}\left\{x(t)\right\},\ x^{(r)}(0) = 0\ \forall r = 0, 1, \cdots, k-1.$$

2.3.2 Фреквентна карактеристика и фреквентна матрица

Посматра се систем S приказан на слици 2.4.

Дефиниција 2.10 *Фреквентна карактеристика система S у ознаци $F(j\omega)$ је количник Фуријеових трансформација његове излазне величине $x_i(t)$ и његове улазне величине $x_u(t)$ при свим почетним условима једнаким нули:*

$$F(j\omega) = \frac{\mathcal{F}\left\{x_i(t)\right\}}{\mathcal{F}\left\{x_u(t)\right\}} = \frac{X_i(j\omega)}{X_u(j\omega)} \tag{2.16}$$

$$x_i^{(k)} = 0, \forall k = 0, 1, \cdots, n-1;\ x_u^{(k)} = 0, \forall k = 0, 1, \cdots, m-1.$$

Из израза 2.16 $\Longrightarrow$

$$X_i(j\omega) = F(j\omega) X_u(j\omega)$$

при свим почетним условима једнаким нули.

Посматра се систем $\mathbf{S}$ приказан на слици 2.5.

Дефиниција 2.11 *$F_{jk}(j\omega)$ је $(j,k)-$та парцијална фреквентна карактеристика система $\mathbf{S}$ у односу на његову $j-$ту излазну величину $x_{ij}(t)$ и његову $k-$ту улазну величину $x_{uk}(t)$:*

$$F_{jk}(j\omega) = \frac{X_{ij}(j\omega)}{X_{uk}(j\omega)},\ \text{при свим почетним условима једнаким нули} \Longrightarrow$$

$$X_{ij}(j\omega) = F_{jk}(j\omega) X_{uk}(j\omega);\ \forall j = 1, 2, \cdots, N;\ \forall k = 1, 2, \cdots, M. \tag{2.17}$$

Очигледно, посматрани систем $\mathbf{S}$ са слике 2.5 има $N \times M$ парцијалних фреквентних карактеристика.

Дефиниција 2.12 **Фреквентна матрица система $\mathbf{S}$** *је $N \times M$ матрична функција од $j\omega$ чији је $(j,k)-$ти елемент његова $(j,k)-$та фреквентна карактеристика $F_{jk}(j\omega)$ и означава се са $\mathbf{F}(j\omega)$:*

$$\mathbf{F}(j\omega) = \begin{bmatrix} F_{11}(j\omega) & F_{12}(j\omega) & \cdots & F_{1M}(j\omega) \\ F_{21}(j\omega) & F_{22}(j\omega) & \cdots & F_{2M}(j\omega) \\ \vdots & & & \\ F_{N1}(j\omega) & F_{N2}(j\omega) & & F_{NM}(j\omega) \end{bmatrix}. \tag{2.18}$$

На основу израза 2.17 и 2.18 следи:

$$\mathbf{X}_i(j\omega) = \mathbf{F}(j\omega) \mathbf{X}_u(j\omega)$$

при свим почетним условима једнаким нули.

2.3.3 Особине фреквентне карактеристике и фреквентне матрице система

Применом Фуријеове трансформације на једначину 2.13 добија се фреквентна карактеристика тог система:

$$F(j\omega) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m} b_k (j\omega)^k}{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k (j\omega)^k} = \frac{r_1(\omega) + ji_1(\omega)}{r_2(\omega) + ji_2(\omega)} \Longrightarrow \tag{2.19}$$

$$F(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$$

где је:

$$R(\omega) = \operatorname{Re} F(j\omega) - \text{реални део фреквентне карактеристике}$$

$$I(\omega) = \operatorname{Im} F(j\omega) - \text{имагинарни део фреквентне карактеристике.}$$

$$R(\omega) = \frac{r_1(\omega) r_2(\omega) + i_1(\omega) i_2(\omega)}{r_2^2(\omega) + i_2^2(\omega)}$$

и

$$I(\omega) = \frac{r_2(\omega) i_1(\omega) - r_1(\omega) i_2(\omega)}{r_2^2(\omega) + i_2^2(\omega)}.$$

Експоненцијални облик фреквентне карактеристике је:

$$F(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

при чему је:

$A(\omega) = |F(j\omega)|$ – **амплитудно фреквентна карактеристика**,

$\varphi(\omega) = \arg F(j\omega)$ – **фазно фреквентна карактеристика.**

На слици 2.6 је приказана једна тачка фреквентне карактеристике у фреквентној равни са њеним реалним и имагинарним делом као и њеним амплитудним и фазним делом.

Са слике 2.6 и на основу израза се добија да је:

$$A(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)} = \frac{\sqrt{r_1^2(\omega) + i_1^2(\omega)}}{\sqrt{r_2^2(\omega) + i_2^2(\omega)}},$$

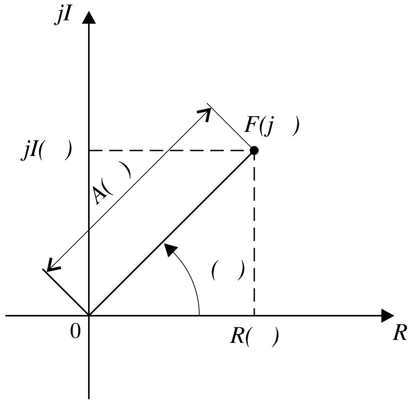
$$\varphi(\omega) = \arctan\frac{I(\omega)}{R(\omega)} = \arctan\frac{i_1(\omega)}{r_1(\omega)} - \arctan\frac{i_2(\omega)}{r_2(\omega)},$$

$$R(\omega) = A(\omega)\cos\varphi(\omega),$$

$$I(\omega) = A(\omega)\sin\varphi(\omega).$$

Без доказа се даје и следећа особина:

$$R(\omega) \equiv R(-\omega) - \text{парна функција од } \omega,$$



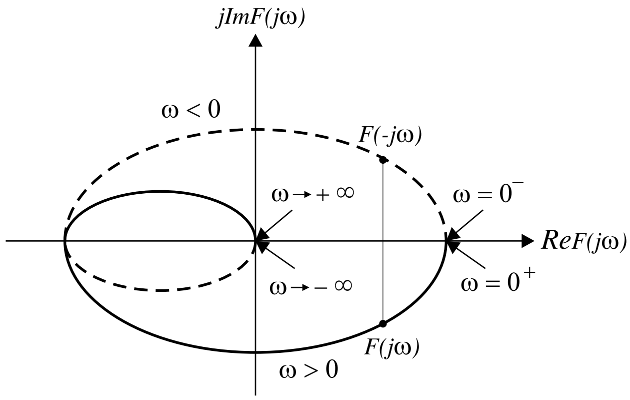
Слика 2.6: Једна тачка фреквентне карактеристике $F\,(j\omega)$ у фреквентној равни

$$I\,(\omega) \equiv -I\,(-\omega) - \text{непарна функција од } \omega,$$

$$A\,(\omega) \equiv A\,(-\omega) - \text{парна функција од } \omega,$$

$$\varphi\,(\omega) \equiv -\varphi\,(-\omega) - \text{непарна функција од } \omega \Longrightarrow$$

Део ходографа фреквентне карактеристике за $\omega \in [-\infty, 0)$ симетричан је делу ходографа фреквентне карактеристике за $\omega \in [0, +\infty)$ у односу на реалну осу, што је приказано на слици 2.7.



Слика 2.7: График фреквентне карактеристике који показује симетричност у односу на реалну осу F фреквентне комплексне равни

Литература

[1]