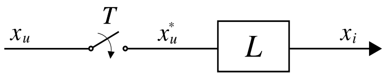
Поглавље 4

Преносне карактеристике дискретног система

4.1 Преносна функција и фреквентна карактеристика једноструко преносног дискретног система

На слици 4.1 приказана је редна веза идеалног одабирача и временски непрекидног линеарног стационарног динамичког система L.



Слика 4.1: Редна веза идеалног одабирача и временски непрекидног линеарног стационарног динамичког система L

Нека је импулсни одзив на нулто стање (почетни услови једнаки нули) система L, $i(t)$.

Када је познато $i(t)$ онда је могуће одредити одзив $x_i(t)$ система L на основу познавања улазног сигнала $x_u^*(t)$, помоћу конволуционог интеграла:

$$x_i(t) = \int_0^t x_u^*(\tau)\, i(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t i(\tau)\, x_u^*(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^\infty x_u^*(\tau)\, i(t-\tau)\, d\tau = \int_0^\infty i(\tau)\, x_u^*(t-\tau)\, d\tau.$$

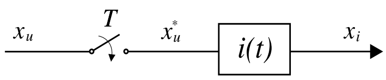
Дигресија 4.1 *Објашњење зашто се горње границе изворних конволуционих интеграла мењају са* $+\infty$ *на* t :

$$x_u^*(t) = 0,\ \forall t < 0 \Longrightarrow x_u^*(t-\tau) = 0,\ \forall (t-\tau) < 0 \ \ mj. \forall \tau > t$$

слично

$$i(t) = 0,\ \forall t < 0 \Longrightarrow i(t-\tau) = 0,\ \forall (t-\tau) < 0 \ \ mj. \forall \tau > t.$$

Имајући у виду везу између улазне и излазне величине система L преко конволуционог интеграла структурни дијаграм приказан на слици 4.1 се често приказује као што је дато на слици 4.2.



Слика 4.2: Редна веза идеалног одабирача и линеарног стационарног динамичког система L означеног његовим јединичним импулсним одзивом $i(t)$

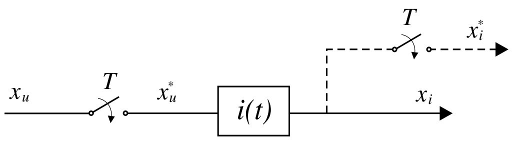
Нека су комплексни ликови сигнала $x_i(t)$ и $x_u^*(t)$, $X_i(s)$ и $X_u^*(s)$, следствено. Према дефиницији, преносна функција линеарног стационарног временски непрекидног система L је количник комплексних ликова излазне и улазне величине при свим почетним условима једнаким нули:

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u^*(s)}.$$

Пошто су функције $X_i(s)$ и $X_u^*(s)$ различите по својој природи, $X_i(s)$ је комплексни лик временски непрекидног сигнала а $X_u^*(s)$ је комплексни лик временски дискретног сигнала, анализа система на основу ове преносне функције би била изузетно сложена као и њен математички третман.

4.1.1 Дискретна преносна функција и дискретна фреквентна карактеристика отвореног дискретног система

Могућ је такав приступ где се особине и излаз система L посматрају само у дискретним тренуцима 0, T, $2T$, $\cdots$,. То би значило као да се на излазу система L налази фиктивни, замишљени одабирач као што покузује слика 4.3.



Слика 4.3: Редна веза идеалног одабирача и линеарног стационарног динамичког система L заједно са фиктивним одабирачем на излазу

Сада је:

$$x_i^*(t) = x_i(t)\,\delta^*(t) = \sum_{j=0}^{\infty} x_i(jT)\,\delta(t - jT).$$

Дигресија 4.2 *Да би се одредило $x_i(jT)$ користи се конволуциони интеграл:*

$$x_i(t) = \int_0^{\infty} x_u^*(\tau)\,i(t-\tau)\,d\tau.$$

Имајући у виду да је:

$$x_u^*(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} x_u(kT)\,\delta(\tau - kT)$$

следи да је:

$$x_i(t) = \int_0^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} x_u(kT)\,\delta(\tau - kT)\right] i(t-\tau)\,d\tau.$$

Када се промени редослед интеграљења и сумирања онда се добија:

$$x_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_u(kT) \left[\int_0^{\infty} \delta(\tau - kT)\, i(t-\tau)\, d\tau \right].$$

Имајући у виду да је:

$$\int_0^{\infty} \delta(\tau - kT)\, i(t-\tau)\, d\tau = i(t-kT)$$

због

$$\delta(\tau - kT) \neq 0 \text{ једино за } \tau = kT \Longrightarrow$$

$$x_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_u(kT)\, i(t-kT).$$

За $t = jT \Longrightarrow$

$$x_i(jT) = \sum_{k=0}^{\infty} x_u(kT)\, i(jT - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} x_u(kT)\, i[(j-k)T].$$

Повратак на главни ток извођења!

$$x_i^*(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} x_u(kT)\, i[(j-k)T] \right\} \delta(t - jT) \Longrightarrow$$

$$x_i^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_u(kT) \sum_{j=0}^{\infty} i[(j-k)T]\, \delta(t-jT).$$

Уводи се смена $j - k = m \Longrightarrow$

$$x_i^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_u(kT) \sum_{m=-k}^{\infty} i(mT)\, \delta[t - (k+m)T].$$

Пошто је:

$$i(mT) = 0,\ \forall m < 0 \Longrightarrow$$

$$x_i^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_u(kT) \sum_{m=0}^{\infty} i(mT)\, \delta[t - (k+m)T]. \tag{4.1}$$

Дефиниција 4.3 *Преносна функција дискретног система у односу на његову дискретну улазну величину* x_u^* *и дискретну излазну величину* x_i^* *је однос комплексних ликова те излазне и те улазне величине при свим почетним условима једнаким нули и назива се* ДИСКРЕТНА ПРЕНОСНА ФУНКЦИЈА *у ознаци* $W^*(s)$:

$$W^*(s) = \frac{X_i^*(s)}{X_u^*(s)}.$$

Дефиниција 4.4 *Фреквентна карактеристика дискретног система у односу на његову дискретну улазну величину* x_u^* *и дискретну излазну величину* x_i^* *је однос фреквентних ликова те излазне и те улазне величине при свим почетним условима једнаким нули и назива се* ДИСКРЕТНА ФРЕКВЕНТНА КАРАКТЕРИСТИКА *у ознаци* $F^*(j\omega)$:

$$F^*(j\omega) = \frac{X_i^*(j\omega)}{X_u^*(j\omega)}.$$

Обзиром да постоје три облика комплексног и фреквентног лика временски дискретног сигнала то постоје и три облика дискретне преносне функције и дискретне фреквентне карактеристике.

4.1.2 Први облик дискретне преносне функције

$X_i^*(s)$ се одређује према дефиницији уз коришћење Лапласове трансформације и израза 4.1:

$$X_i^*(s) = \mathcal{L}^-\{x_i^*\} = \int\limits_{0^-}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_u(kT) \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} i(mT)\,\delta\left[t-(k+m)T\right] \right\} e^{-st}dt.$$

Променом редоследа интеграљења и сумирања добија се:

$$X_i^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x_u(kT) \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} i(mT) \int\limits_{0^-}^{\infty} \delta\left[t-(k+m)T\right] e^{-st}dt \right\} \Longrightarrow$$

$$X_i^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x_u(kT) \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} i(mT)\, e^{-(k+m)sT} \right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x_u(kT)\, e^{-kTs} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} i(mT)\, e^{-mTs} =$$

$$= X_u^*(s) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} i(mT)\, e^{-mTs}.$$

Закључно

$$X_i^*(s) = \left[\sum_{m=0}^{\infty} i(mT)\, e^{-mTs} \right] \cdot X_u^*(s)$$

и уз коришћење дефиниције дискретне преносне функције

$$X_i^*(s) = W^*(s) \cdot X_u^*(s) \Longrightarrow$$

$$W^*(s) = \sum_{m=0}^{\infty} i(mT)\, e^{-mTs}. \tag{4.2}$$

Лако је уочити да десна страна израза 4.2 није ништа друго до комплексни лик временски дискретизованог импулсног одзива линеарног система L:

$$\sum_{m=0}^{\infty} i\left(mT\right) e^{-mTs} = I^*\left(s\right) \Longrightarrow$$

$$W^*\left(s\right) = I^*\left(s\right) = \sum_{k=0}^{\infty} i\left(kT\right) e^{-kTs} = \mathcal{L}^- \left\{i^*\left(t\right)\right\}.$$

Први облик комплексног лика сигнала $i^*\left(t\right)$ повлачи први облик дискретне преносне функције. На сличан начин се добијају и други и трећи облик дискретне преносне функције.

4.1.3 Други облик дискретне преносне функције

Користећи чињеницу да је $W^*\left(s\right) = I^*\left(s\right)$ и други облик комплексног лика излазног сигнала идеалног одабирача, следи да је други облик дискретне преносне функције:

$$W^*\left(s\right) = I^*\left(s\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} I\left(s + jk\omega_0\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} W\left(s + jk\omega_0\right) = \mathcal{L}^- \left\{i^*\left(t\right)\right\}.$$

Дискретна преносна функција је периодична у односу на имагинарни део комплексне промењљиве s. То значи да она има бесконачно много нула (полова) са истим реалним делом.

4.1.4 Трећи облик дискретне преносне функције

Користећи чињеницу да је $W^*\left(s\right) = I^*\left(s\right)$ и трећи облик комплексног лика излазног сигнала идеалног одабирача, следи да је трећи облик дискретне преносне функције:

$$W^*\left(s\right) = I^*\left(s\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{q\left(p_k^*\right)}{f'\left(p_k^*\right)} \frac{1}{1 - e^{Tp_k^*}e^{-Ts}} = \mathcal{L}^- \left\{i^*\left(t\right)\right\}$$

за случај да је:

$$I\left(p\right) = \frac{q\left(p\right)}{f\left(p\right)}$$

и да су сви полови p_k^* од $I\left(p\right)$:

$$f\left(p_k^*\right) = 0, \quad \forall k = 1, 2, \cdots, n$$

једноструки.

У општем случају када има и вишеструких полова трећи облик дискретне преносне функције је:

$$W^*\left(s\right) = \sum_k \left[Res\ \frac{1}{1 - e^{-(s-p)T}} W\left(p\right)\right]\Bigg|_{p=p_k^* \text{ пол од } W(p)}.$$

Ова сума је узета по свим половима p_k^* од $W\left(p\right)$ обухваћених контуром Γ_1.

4.1.5 Први облик дискретне фреквентне карактеристике

Формално замењујући s са $j\omega$, слично као и код добијања првог облика дискретне преносне функције следи да је:

$$X_i^*(j\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} x_u(kT)\, e^{-jk\omega T} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} i(mT)\, e^{-jm\omega T} =$$

$$= X_u^*(j\omega) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} i(mT)\, e^{-jm\omega T}$$

због

$$X_u^*(j\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} x_u(kT)\, e^{-jk\omega T}.$$

Користећи дефиницију дискретне фреквентне карактеристике $\Longrightarrow$

$$X_i^*(j\omega) = F^*(j\omega)\, X_u^*(j\omega) \Longrightarrow$$

$$F^*(j\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} i(kT)\, e^{-jk\omega T}.$$

Први облик дискретне фреквентне карактеристике се формално добија кад се комплексна променљива s у изразу за први облик дискретне преносне функције замени са $j\omega$.

4.1.6 Други облик дискретне фреквентне карактеристике

Други облик дискретне фреквентне карактеристике се формално добија кад се комплексна променљива s у изразу за други облик дискретне преносне функције замени са $j\omega$:

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} I\left[j(\omega + k\omega_0)\right] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left[j(\omega + k\omega_0)\right].$$

4.1.7 Трећи облик дискретне фреквентне карактеристике

Трећи облик дискретне фреквентне карактеристике се формално добија кад се комплексна променљива s у изразу за трећи облик дискретне преносне функције замени са $j\omega$:

$$F^*(j\omega) = \sum_{k=1}^{n} \frac{q(p_k^*)}{f'(p_k^*)} \frac{1}{1 - e^{-\left(j\omega - p_k^*\right)T}}$$

за случај једноструких полова од $I(p)$ односно $W(p)$ где је:

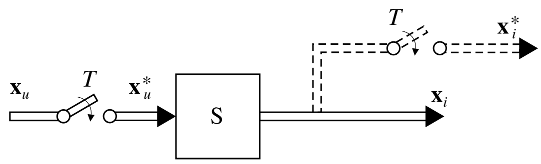
$$W(p) = \frac{q(p)}{f(p)}.$$

У општем случају када има и вишеструких полова од $W(p)$ трећи облик дискретне фреквентне карактеристике је:

$$F^*(j\omega) = \sum_{k=1}^{n} \left[Res\ \frac{1}{1 - e^{-(j\omega - p)T}} W(p) \right] \Bigg|_{p=p_k^* \text{ пол од } W(p)}.$$

4.2 Дискретна преносна матрица и дискретна фреквентна матрица вишеструко преносног дискретног система

На слици, 4.4 приказана је редна веза система идеалних одабирача и вишеструко преносног система S при чему је на његовом излазу систем фиктивних идеалних одабирача.



Слика 4.4: Редна веза система идеалних одабирача и вишеструко преносног система S заједно са системом фиктивних одабирача на излазу

Нека је:

$$X_{uk}^*(s) - \text{ комплексни лик } k - \text{те улазне величине } x_{uk}^*(t),$$
$$X_{uk}^*(j\omega) - \text{ фреквентни лик } k - \text{те улазне величине } x_{uk}^*(t),$$
$$X_{ij}^*(s) - \text{ комплексни лик } j - \text{те излазне величине } x_{ij}^*(t),$$
$$X_{ij}^*(j\omega) - \text{ фреквентни лик } j - \text{те излазне величине } x_{ij}^*(t).$$

Дефиниција 4.5 $W_{jk}^*(s)$ *је дискретна преносна функција система са слике 4.4 у односу на његову* $j-$*ту,* $j = 1, 2, \cdots, N$*, излазну и* $k-$*ту,* $k = 1, 2, \cdots, M$*, улазну величину.*

Дефиниција 4.6 $F_{jk}^*(j\omega)$ *је дискретна фреквентна карактеристика система са слике 4.4 у односу на његову* $j-$*ту,* $j = 1, 2, \cdots, N$*, излазну и* $k-$*ту,* $k = 1, 2, \cdots, M$*, улазну величину.*

Дефиниција 4.7 *Матрична функција* $\mathbf{W}^*$ *типа* $N \times M$*, чији је* $(j,k)-$*ти елемент* $W_{j,k}^*(s)$ *вишеструко преносног дискретног система са слике 4.4, је* ДИСКРЕТНА ПРЕНОСНА МАТРИЦА *тог истог система:*

$$\mathbf{W}^*(s) = \begin{bmatrix} W_{11}^*(s) & W_{12}^*(s) & \cdots & W_{1M}^*(s) \\ W_{21}^*(s) & W_{22}^*(s) & \cdots & W_{2M}^*(s) \\ & \vdots & & \\ W_{N1}^*(s) & W_{N2}^*(s) & \cdots & W_{NM}^*(s) \end{bmatrix}.$$

Дефиниција 4.8 *Матрична функција* $\mathbf{F}^*$ *типа* $N \times M$*, чији је* $(j,k)-$*ти елемент* $F_{j,k}^*(j\omega)$ *вишеструко преносног дискретног система са слике 4.4, је* ДИСКРЕТНА ФРЕКВЕНТНА КАРАКТЕРИСТИКА *тог истог система:*

$$\mathbf{F}^*(s) = \begin{bmatrix} F_{11}^*(j\omega) & F_{12}^*(j\omega) & \cdots & F_{1M}^*(j\omega) \\ F_{21}^*(j\omega) & F_{22}^*(j\omega) & \cdots & F_{2M}^*(j\omega) \\ & \vdots & & \\ F_{N1}^*(j\omega) & F_{N2}^*(j\omega) & \cdots & F_{NM}^*(j\omega) \end{bmatrix}.$$