

Поглавље 3

Комплексни и фреквентни лик излаза идеалног одабирача

3.1 Лапласова и Фуријеова трансформација излазног сигнала идеалног одабирача

Дефиниција 3.1 Лева Лапласова трансформација излазног сигнала идеалног одабирача назива се КОМПЛЕКСНИ ЛИК излазног сигнала идеалног одабирача и означава са $X^*(s)$:

$$X^*(s) = \mathcal{L}^- \{x^*(t)\} = \int_{0^-}^{+\infty} x^*(t) e^{-st} dt$$

Напомена 3.2 $s = \sigma + j\omega$, $\sigma \in \mathcal{R}$, $\omega \in \mathcal{R}$, $j = \sqrt{-1}$.

Дигресија 3.3 *Зашто лева Лапласова трансформација?! Види: Милојковић, Б., Грујић, Љ.: Аутоматско управљање, стр.162, 163.*

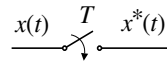
Дефиниција 3.4 Фуријеова трансформација излазног сигнала идеалног одабирача назива се ФРЕКВЕНТНИ ЛИК излазног сигнала идеалног одабирача и означава са $X^*(j\omega)$:

$$X^*(j\omega) = \mathcal{F} \{x^*(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{0^-}^{\infty} x^*(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Напомена 3.5 $x(t) = 0 \wedge x^*(t) = 0, \forall t < 0$.

3.1.1 Први облик комплексног и фреквентног лика излазног сигнала идеалног одабирача

Посматра се идеални одабирач приказан на слици 3.1.



Слика 3.1: Идеални одабирач

За добијање првог облика комплексног и фреквентног лика излазног сигнала идеалног одабирача приказаног на слици 3.1 користи се следећи облик тог излазног сигнала:

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t) \delta(t - kT).$$

Према дефиницији примењује се Лапласова трансформација:

$$X^*(s) = \mathcal{L}^- \{x^*(t)\} = \mathcal{L}^- \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} x(t) \delta(t - kT) \right\} = \mathcal{L}^- \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT) \right\}.$$

Користећи особину линеарности Лапласове трансформације добија се:

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \mathcal{L}^{-}\{\delta(t - kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs}.$$

Конечно, први облик комплексног лика је:

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs}.$$

Формалним замењивањем $s = j\omega$ у задњем изразу добија се први облик фреквентног лика излазног сигнала идеалног одабирача:

$$X^*(j\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-jkT\omega}.$$

3.1.2 Други облик комплексног и фреквентног лика излазног сигнала идеалног одабирача

За добијање другог облика комплексног и фреквентног лика излазног сигнала идеалног одабирача користи се следећи облик тог излазног сигнала:

$$x^*(t) = x(t) \delta^*(t).$$

По дефиницији примењује се Лапласова трансформација:

$$X^*(s) = \mathcal{L}^{-}\{x^*(t)\} = \mathcal{L}^{-}\{x(t) \delta^*(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} x(t) \delta^*(t) e^{-st} dt.$$

Дигресија 3.6 а) Лапласова трансформација функције $\delta^*(t)$ и б) Приказ функције $x(t)$ преко њеног p комплексног лика $X(p)$

а) Лапласова трансформација функције $\delta^*(t)$:

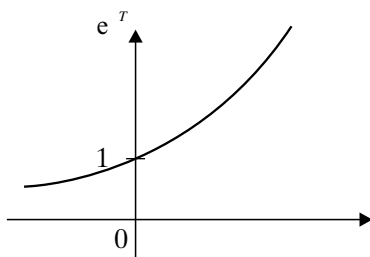
$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-}\{\delta^*(t)\} &= \int_{0^-}^{\infty} \delta^*(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) \right] e^{-st} dt = \\ &= \int_{0^-}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) e^{-st} \right] dt = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{0^-}^{\infty} \delta(t - kT) e^{-st} dt \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs} = 1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \dots + e^{-kTs} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \end{aligned}$$

Последњи резултат је сума геометријског реда али само под условом да је његов количник $q = e^{-Ts}$ такав да је:

$$|e^{-Ts}| < 1 \implies |e^{-(\sigma + j\omega)T}| < 1 \implies |e^{-\sigma T} e^{-j\omega T}| = e^{-\sigma T} < 1 \implies$$

$$\frac{1}{e^{\sigma T}} < 1 \implies e^{\sigma T} > 1.$$

Пошто је T по својој природи позитивно следи да је функција $e^{\sigma T} > 1$ за $\sigma > 0$ односно $\operatorname{Re} s > 0$ што је исти закључак. На слици 3.2 је приказана функција $e^{\sigma T}$.

Слика 3.2: Функција $e^{\sigma T}$

Напомена 3.7 Сума геометријског низа

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

Сума геометријског реда

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{k-1} + \dots = \frac{a}{1 - q}.$$

q је количник у једном случају геометријског низа а у другом случају геометријског реда.

б) Приказ функције $x(t)$ преко њеног p комплексног лика $X(p)$

$$X(p) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt \implies$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p) e^{pt} dp.$$

Повратак на главни ток извођења!

$$\begin{aligned} X^*(s) &= \int_{0^-}^{\infty} x(t) \delta^*(t) e^{-st} dt = \\ &= \int_{0^-}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p) e^{pt} dp \right] \delta^*(t) e^{-st} dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p) \left[\int_{0^-}^{\infty} \delta^*(t) e^{-(s-p)t} dt \right] dp = \\
&= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p) \mathcal{L}^{-}\{\delta^*(t)\} dp = \\
&= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p) \frac{1}{1 - e^{-(s-p)T}} dp = X^*(s)
\end{aligned}$$

Имајући у виду дигресију 3.6, услов да у задњем изразу Лапласова трансформација функције $\delta^*(t)$ има затворени облик $\frac{1}{1 - e^{-(s-p)T}}$ је:

$$\operatorname{Re}(s - p) > 0 \implies \operatorname{Re}s - \operatorname{Re}p > 0 \implies \operatorname{Re}s > \operatorname{Re}p!$$

Даље трансформације последњег израза заснивају се на Кошијевој теореме чија примена се базира на претпоставци 3.9.

Напомена 3.8 Кошијева теорема о остацима гласи

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\nu=1}^k \operatorname{Res}_{z=z^{\nu}} f(z).$$

Претпоставка 3.9 Комплексни лик $X(p)$ временски непрекидног сигнала $x(t)$ је реална рационална функција комплексне променљиве p тако да је:

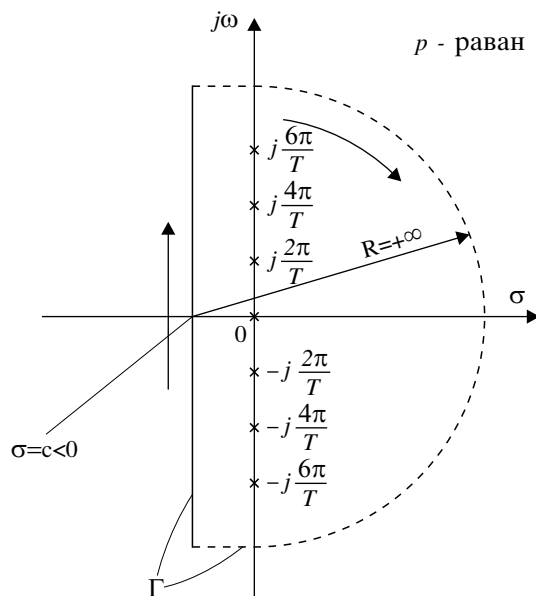
1. степен полинома у имениоцу већи од степена полинома у бројоциу за 2 или више,
2. реални делови свих полова функције $X(p)$ су негативни.

Последица 3.10 Као последице претпоставке 3.9 појављује се следеће:

- функција $x(t)$ је ограничена и $x(t) \rightarrow 0$ за $t \rightarrow \infty$ (види: Милојковић, Б., Грујић, Љ. "Аутоматско управљање", страна 175),
- могуће је раздвојити полове функција $X(p)$ и $\frac{1}{1 - e^{-(s-p)T}}$ у равни p правом $\sigma = c < 0$, $c \in]\gamma, +\infty[$, γ - апсциса конвергенције, као што је показано на слици 3.3,
- вредност интегранда задњег израза се не мења дуж полукруга у бесконачности према слици 3.3.

Дигресија 3.11 Одређивање полова функције $\frac{1}{1 - e^{-(s-p)T}}$

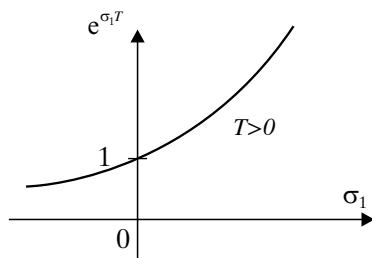
$$1 - e^{-(s-p)T} = 0 \implies e^{(s-p)T} = 1$$



Слика 3.3: Полови функције $\frac{1}{1-e^{-(s-p)T}}$

Нека је:

$$\begin{aligned}
 w = s - p = \sigma_1 + j\omega_1 &\implies \\
 e^{\sigma_1 T} e^{j\omega_1 T} = 1 &\implies e^{\sigma_1 T} (\cos \omega_1 T + j \sin \omega_1 T) = 1 \implies \\
 e^{\sigma_1 T} \cos \omega_1 T + j e^{\sigma_1 T} \sin \omega_1 T &= 1 \implies \\
 e^{\sigma_1 T} \sin \omega_1 T = 0, e^{T\sigma_1} \neq 0, &\text{ види слику 6.4}
 \end{aligned}$$



Слика 3.4: Функција $e^{\sigma_1 T}$

$$\sin \omega_1 T = 0 \implies \omega_1 T = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$e^{\sigma_1 T} \cos k\pi = 1 \implies e^{\sigma_1 T} (-1)^k = 1 \quad (3.1)$$

$$e^{\sigma_1 T} = 1 \implies \sigma_1 T = 0 \implies \sigma_1 = 0 \quad (3.2)$$

На основу израза 3.1 следи:

$$\begin{aligned}
 k &= 2n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \implies \\
 \omega_1 T &= 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\
 \omega_1 T &= 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \implies \\
 \omega_1 &= \frac{2k\pi}{T}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

На основу израза 3.2 и 3.3 следи:

$$\begin{aligned}
 w^* &= s - p^* = \overset{=0}{\sigma_1} + j\omega_1 = j\frac{2k\pi}{T}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \implies \\
 p_k^* &= s - j\frac{2k\pi}{T}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\
 p_k^* &= s + j\frac{2k\pi}{T}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots
 \end{aligned}$$

Повратак на главни ток извођења!

$$\begin{aligned}
 X^*(s) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p) \frac{1}{1 - e^{-(s-p)T}} dp = \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma^-} X(p) \frac{1}{1 - e^{-(s-p)T}} dp = \\
 &= -\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(p) \frac{1}{1 - e^{-(s-p)T}} dp = \\
 &= -\frac{1}{2\pi j} \left\{ j2\pi \sum \operatorname{Res} \left[X(p) \frac{1}{1 - e^{-(s-p)T}} \right]_{\Gamma} \right\} = \\
 &= -\frac{1}{2\pi j} \left\{ j2\pi \sum X(p) \operatorname{Res} \left[\frac{1}{1 - e^{-(s-p)T}} \right]_{\Gamma} \right\}
 \end{aligned}$$

Дигресија 3.12 Одређивање резидијума у половима функције $\frac{1}{1 - e^{-(s-p)T}}$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Res} \frac{1}{1 - e^{-(s-p)T}} \Big|_{p=p_k^*} &= \frac{1}{\frac{d}{dt} [1 - e^{-(s-p)T}]} \Big|_{p=p_k^*} = \\
 &= \frac{1}{-T e^{-(s-p)T}} \Big|_{p=s+j\frac{2k\pi}{T}} = \frac{1}{-T e^{j2k\pi}} = \\
 &= \frac{1}{-T \left(\underset{=1}{\cos 2k\pi} + j \underset{=0}{\sin 2k\pi} \right)} = \frac{1}{-T}
 \end{aligned}$$

Повратак на главни ток извођења!

$$\begin{aligned} X^*(s) &= - \left(-\frac{1}{T} \right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(p) \Big|_{p=p_k^*=s+j\frac{2k\pi}{T}} = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X \left(s + jk \frac{2\pi}{T} \right) = \mathcal{L}^- \{x^*(t)\} = \mathcal{L}^+ \{x^*(t)\} \end{aligned}$$

У случају да део 1. претпоставке 3.9 није испуњен (степен полинома у имениоцу је већи од степена полинома у бројиоцу за 1 а не за 2 или више) онда је:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^+ \{x^*(t)\} &= \frac{1}{2} x(0^+) + \mathcal{L}^- \{x^*(t)\} = \\ &= \frac{1}{2} x(0^+) + \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X \left(s + jk \frac{2\pi}{T} \right). \end{aligned}$$

Други облик фреквентног лика излазног сигнала идеалног одабирача се добија формалном заменом s са $j\omega$ у претходном изразу:

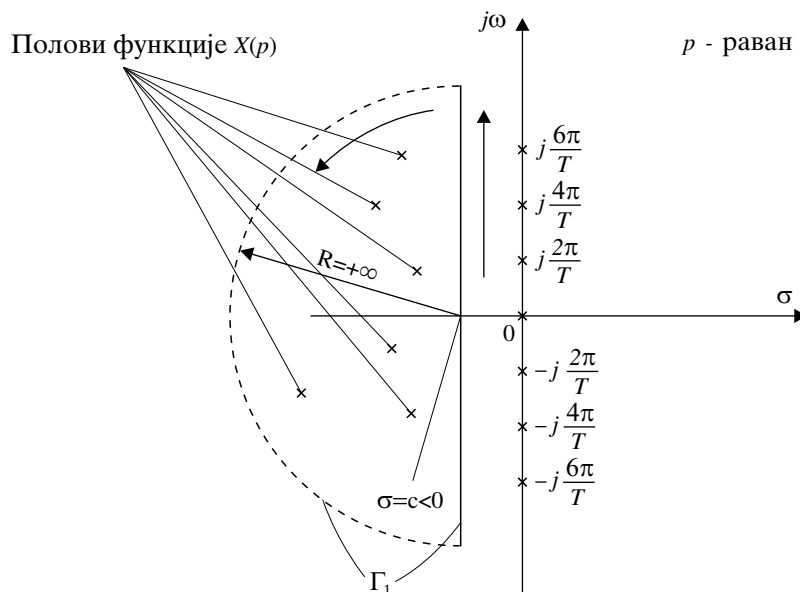
$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[j(\omega + k\omega_0)].$$

3.1.3 Трећи облик комплексног и фреквентног лика излазног сигнала идеалног одабирача

$$X^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p) \frac{1}{1 - e^{-(s-p)T}} dp$$

За добијање трећег облика комплексног и фреквентног лика излазног сигнала идеалног одабирача, за разлику од другог облика, интеграција се врши дуж контуре која је приказана на слици 3.5.

$$\begin{aligned} X^*(s) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} X(p) \frac{1}{1 - e^{-(s-p)T}} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \left\{ j2\pi \sum Res \left[X(p) \frac{1}{1 - e^{-(s-p)T}} \right] \Big|_{\Gamma_1} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \left\{ j2\pi \sum X(p) Res \frac{1}{1 - e^{-(s-p)T}} \Big|_{\Gamma_1} \right\} = \end{aligned}$$

Слика 3.5: Положај полова функције $X(p)$ и контуре интеграције Γ_1 .

Дигресија 3.13 *Одређивање резидијума функције $X(p)$ у њеним половима за случај када су ти полови једноструки*

$$X(p) = \frac{q(p)}{f(p)} \implies \text{Res } X(p)|_{p=p_i^*} = \frac{q(p)}{f'(p)} \Big|_{p=p_i^*}$$

Напомена 3.14 $p_i^* = i$ -ти пол функције $X(p)$.

Повратак на главни ток извођења!

$$X^*(s) = \sum_{i=1}^n \frac{q(p_i^*)}{f'(p_i^*)} \frac{1}{1 - e^{p_i^* T} e^{-sT}}$$

$$X^*(j\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{q(p_i^*)}{f'(p_i^*)} \frac{1}{1 - e^{p_i^* T} e^{-j\omega T}}$$

3.2 Периодичност комплексног лика $X^*(s)$

Став 3.15 *Комплексни лик $X^*(s)$ је периодична функција у односу на имагинарни део комплексне променљиве s с периодом једнаком учестаности одабирања ω_0 :*

$$X^*(s) = X^*(s + j\nu\omega_0), \forall \nu \in Z$$

Напомена 3.16 Z је скуп целих бројева.

Доказ. Нека је s произвољан комплексни број а ν произвољан цео број

$$\begin{aligned} X^*(s + j\nu\omega_0) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s + j\nu\omega_0 + jk\omega_0) = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[s + j(k + \nu)\omega_0] \end{aligned}$$

Уводи се смена $m = k + \nu$, $k \rightarrow -\infty \Rightarrow m \rightarrow -\infty$, $k \rightarrow +\infty \Rightarrow m \rightarrow +\infty \Rightarrow$

$$X^*(s + j\nu\omega_0) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(s + jm\omega_0) = X^*(s)$$

■

Последица 3.17 Последица периодичности комплексног лика $X^*(s)$

- ако је $s^0(s^*)$ нула (пол) функције $X^*(s)$ онда је $s = s^0 + jk\omega_0$ ($s = s^* + jk\omega_0$) такође нула (пол) функције $X^*(s)$,
- функција $X^*(s)$ или нема нулу (пол) или има бесконачно много нула (полова) са истим реалним делом.

Наведено у последици 3.17 је илустровано на слици 3.6.

Отворени основни појас је дефинисан са:

$$P_0 = \left\{ s : s = \sigma + j\omega, \sigma \in \mathcal{R}, -\frac{\omega_0}{2} < \omega < \frac{\omega_0}{2} \right\}$$

а затворени основни појас је дефинисан са:

$$\bar{P}_0 = \left\{ s : s = \sigma + j\omega, \sigma \in \mathcal{R}, -\frac{\omega_0}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2} \right\}.$$

Довољно је одредити све нуле и полове од $X^*(s)$ у основном појасу \bar{P}_0 а остале нуле и полове се добијају транслацијом оних из \bar{P}_0 за $j\nu\omega_0$, $\nu \in \mathbb{Z}$.

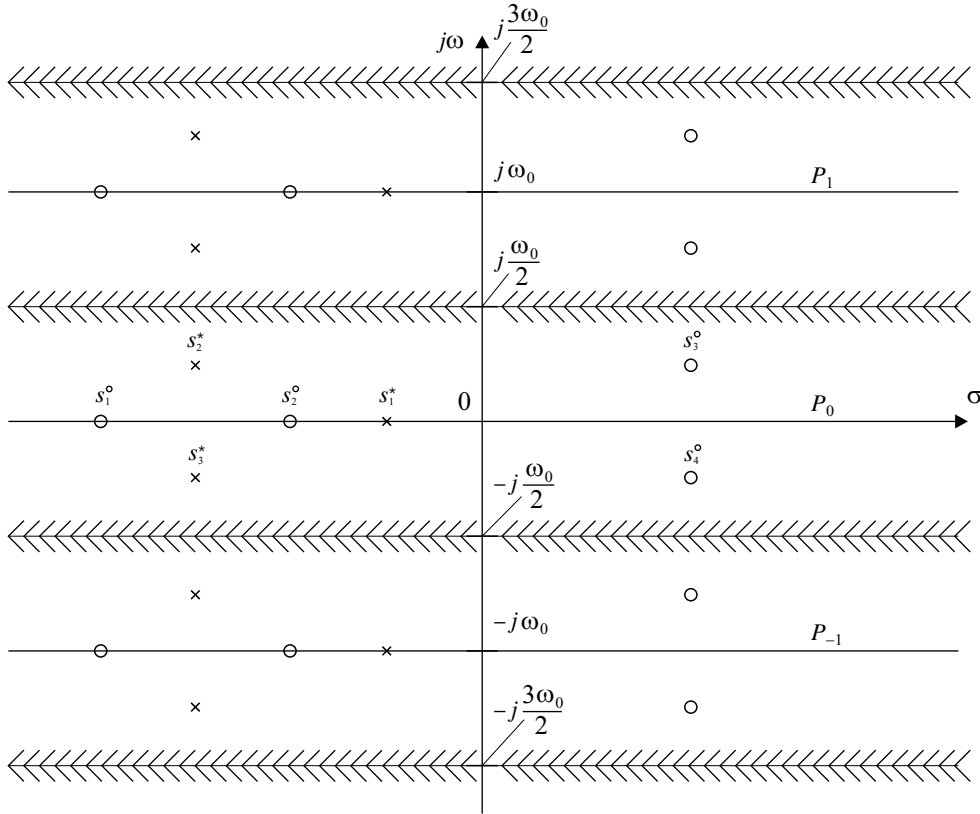
3.3 Периодичност фреквентног лика $X^*(j\omega)$

Периодичност фреквентног лика излазног сигнала идеалног одабирача је већ имплицитно истакнута у ранијим одељцима.

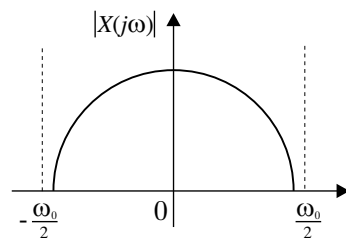
3.3.1 Појава виших учестаности у фреквентном лику $X^*(j\omega)$

Нека улазна величина идеалног одабирача има фреквентни лик $X(j\omega)$ тако да је њен фреквентни спектар као што је приказано на слици 3.7.

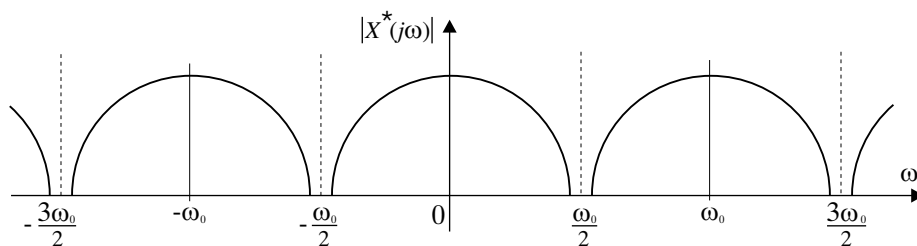
Имајући у виду други облик фреквентног лика излазног сигнала идеалног одабирача и његову периодичност, фреквентни спектар сигнала $x^*(t)$ је приказан на слици 3.8.



Слика 3.6: Илустрација периодичности функције $X^*(s)$



Слика 3.7: Фреквентни спектар улазног сигнала идеалног одабирача



Слика 3.8: Фреквентни спектар излазног сигнала идеалног одабирача $x^*(t)$

Очигледно да овај последњи фреквентни спектар садржи и више учестаности од учестаности одабирања тј.:

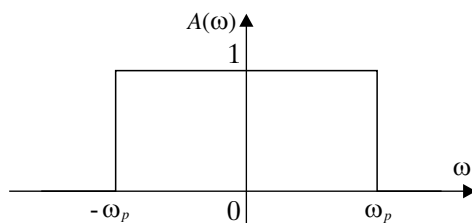
$$|X^*(j\omega)| \neq 0 \text{ за } \omega > \omega_0.$$

Одабирач ствара више учестаности. У излазном сигналу $x^*(t)$ се појављују виши хармоници.

3.3.2 Ниско пропусни пригушивач (филтер)

Дефиниција 3.18 *Ниско пропусни пригушивач (филтер) је систем који улазни периодични сигнал са учестаношћу до одређене учестаности ω_p пропушта без промене амплитуде а са учестаностима преко учестаности ω_p потпуно пригушује.*

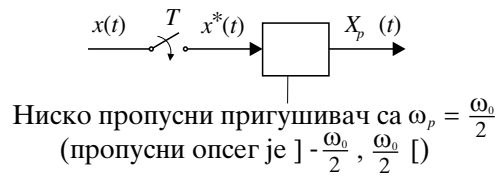
Карактеристика нископропусног пригушивача (филтра) је приказана на слици 3.9.



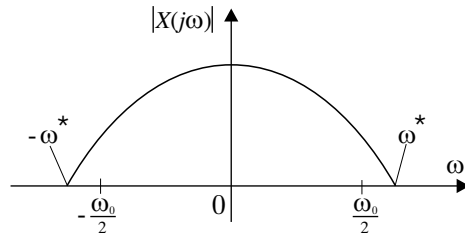
Слика 3.9: Карактеристика идеалног нископропусног пригушивача (филтра)

Нека излазни сигнал идеалног одабирача улази у нископропусни пригушивач као што показује структурни дијаграм на слици 3.10.

- а) У случају када је фреквентни спектар сигнала $x(t)$ као што је приказано на слици 3.7, сигнал $x_p(t)$ има једнак фреквентни спектар са сигналом $x(t)$, што значи да се на основу сигнала $x_p(t)$ може верно репродуковати сигнал $x(t)$.

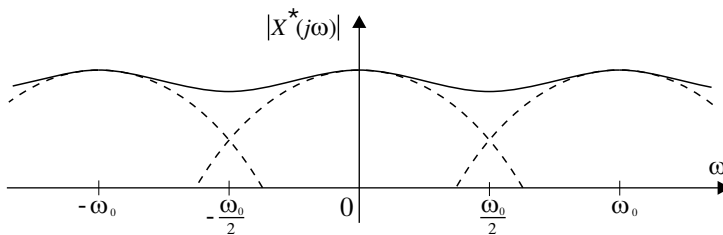


Слика 3.10: Редна веза идеалног одабирача и нископропусног филтра

Слика 3.11: Фреквентни спектар улазног сигнала идеалног одабирача при $\omega^* > \frac{\omega_0}{2}$

б) Нека је фреквентни спектар сигнала $x(t)$ приказан на слици 3.11.

Тада су фреквентни спектри сигнала $x^*(t)$ и $x_p(t)$ приказани на сликама 3.12 и 3.13, следствено.

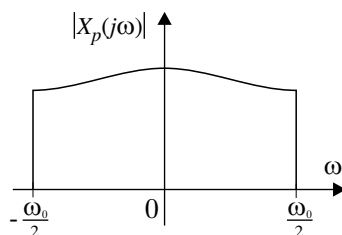
Слика 3.12: Фреквентни спектар излазног сигнала идеалног одабирача за случај $\omega^* > \frac{\omega_0}{2}$

Очигледно фреквентни спектар сигнала $x(t)$ и $x_p(t)$ се разликују што значи да се на основу сигнала $x_p(t)$ не може репродуковати сигнал $x(t)$ јер се губи много информација приликом временске дискретизације. За репродукцију улазног сигнала $x(t)$ неопходно је да:

$$\omega^* \leq \frac{\omega_0}{2}, \omega^* \text{ је такво да } \left. \begin{array}{l} > 0 \quad \forall |\omega| < \omega^* \\ = 0 \quad \forall |\omega| \geq \omega^* \end{array} \right\} .$$

3.3.3 Шенонова теорема (Теорема одабирања)

Теорема 3.19 Ако фреквентни спектар $|X(j\omega)|$ улазног сигнала $x(t)$ идеалног одабирача не садржи учестаности веће по модулу од једне половине



Слика 3.13: Фреквентни спектар излазног сигнала ниско пропусног филтра $x_p(t)$ за случај $\omega^* > \frac{\omega_0}{2}$

учестаности одабирача t_j .

$$|X(j\omega)| = 0, \quad \forall |\omega| \geq \frac{\omega_0}{2}$$

онда је тај сигнал потпуно одређен излазним сигналом тог одабирача.

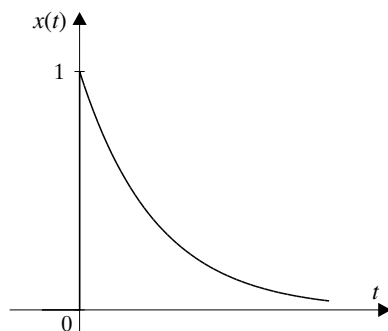
Сваки дискретан систем треба да буде такав да је испуњена Шенонова теорема, и она је основ за одређивање периоде одабирања.

3.3.4 Физичко тумачење Шенонове теореме кроз пример

Нека је улазни сигнал идеалног одабирача

$$x(t) = e^{-\alpha t} h(t), \quad \alpha \in]0, +\infty[\implies |X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}}.$$

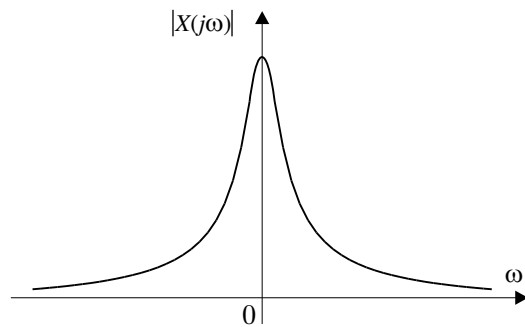
Улазни сигнал идеалног одабирача $x(t)$ је приказан на слици 3.14



Слика 3.14: Функција $x(t) = e^{-\alpha t} h(t)$

Фреквентни спектар улазног сигнала идеалног одабирача у овом примеру је приказан на слици 3.15

Очигледно да фреквентни спектар овог улазног сигнала, као што је случај и са осталим физички остварљивим сигнаlima, нема ограничену учестаност ω^* .



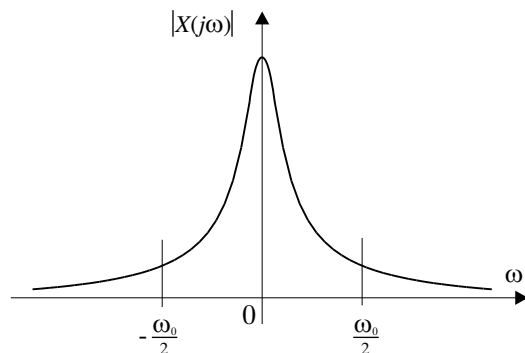
Слика 3.15: Фреквентни спектар улазног сигнала идеалног одабирача са слике 3.14

Због тога се овај сигнал не може тачно репродуковати на основу излаза из идеалног одабирача. Да би се постигла што већа тачност репродуковања потребно је бирати што веће ω_0 тако да:

$$|X(j\omega)| \approx 0, \forall |\omega| \geq \frac{\omega_0}{2}.$$

а) Случај релативно велике учестаности одабирања.

На слици 3.16 приказан је фреквентни спектар улазног сигнала за случај релативно велике учестаности одабирања.



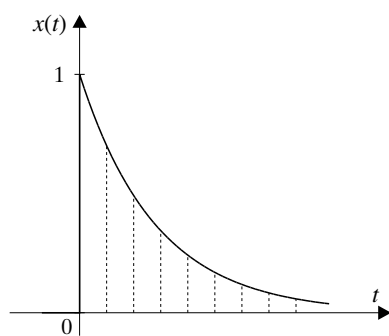
Слика 3.16: Фреквентни спектар улазног сигнала за случај релативно велике учестаности одабирања

У том случају на слици 3.17 је приказан улазни сигнал а на слици 3.18 излазни сигнал идеалног одабирача.

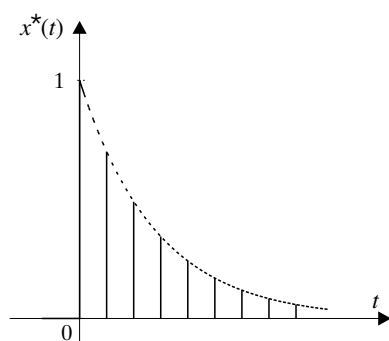
б) Случај мале учестаности одабирања

На слици 3.19 приказан је фреквентни спектар улазног сигнала за случај мале учестаности одабирања.

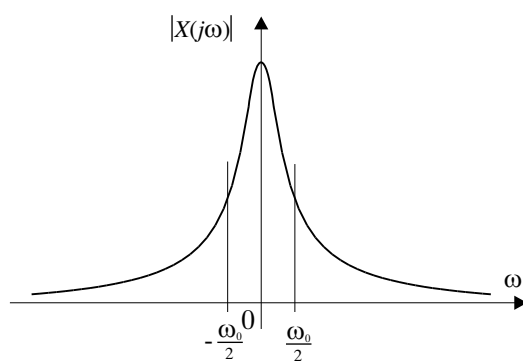
На слици 3.20 приказан је фреквентни спектар излазног сигнала за случај мале учестаности одабирања.



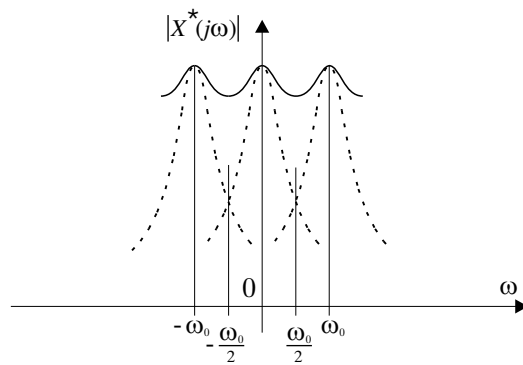
Слика 3.17: Улазни сигнал идеалног одабирача за случај велике учестаности одабирања



Слика 3.18: Излазни сигнал идеалног одабирача за случај велике учестаности одабирања

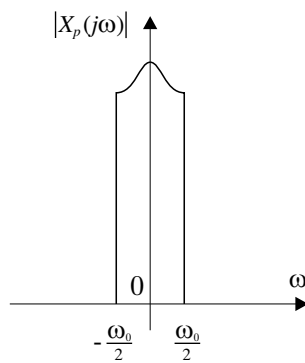


Слика 3.19: Фреквентни спектар улазног сигнала идеалног одабирача за случај мале учестаности одабирања



Слика 3.20: Фреквентни спектар излазног сигнала за случај мале учестаности одабирања

На слици 3.21 приказан је фреквентни спектар излазног сигнала нископропусног филтера за случај мале учестаности одабирања.



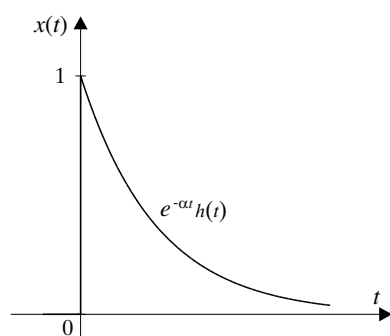
Слика 3.21: Фреквентни спектар излазног сигнала нископропусног филтера за случај мале учестаности одабирања

На слици 3.22 поново се приказује улазни сигнал идеалног одабирача ради лакшег сагледавања који сигнал треба реконструисати на основу одговарајућег временски дискретног сигнала.

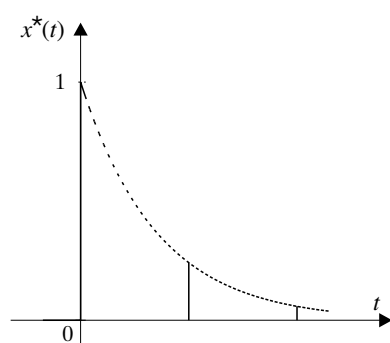
На слици 3.23 приказан је одговарајући временски дискретизовани сигнал.

Напомена 3.20 *Мала учестаност одабирања значи велику периоду одабирања.*

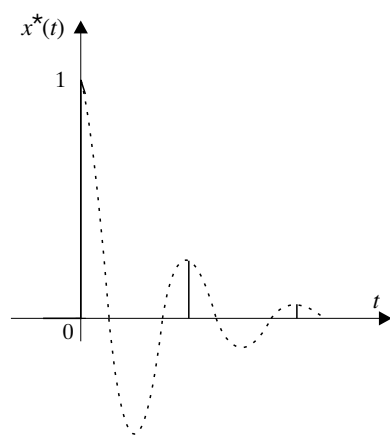
На слици 3.24 приказан је временски дискретизован сигнал заједно са могућим реконструисаним сигналом назначеним црткасто.



Слика 3.22: Улазни сигнал идеалног одабирача



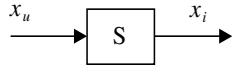
Слика 3.23: Излазни сигнал идеалног одабирача за случај мале учестаности одабирања



Слика 3.24: Временски дискретизован сигнал са црткасто назначеним могуће реконструисаним сигналом

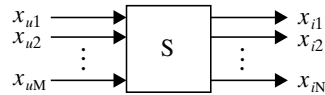
3.4 Једноструко преносни и вишеструко преносни дискретни системи

Дефиниција 3.21 Систем S је једноструко преносни систем \iff има само једну улазну и једну излазну величину. Дијаграм једноструко преносног система је приказан на слици 3.25.



Слика 3.25: Дијаграм једноструко преносног система S

Дефиниција 3.22 Систем S је вишеструко преносни систем \iff је укупан број његових улазних и излазних величина већи од 2. Дијаграм вишеструко преносног система је приказан на слици 3.26.



Слика 3.26: Дијаграм вишеструко преносног система S

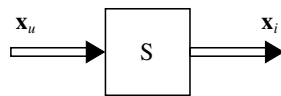
После увођења вектора улаза

$$\mathbf{x}_u = \begin{bmatrix} x_{u1} \\ x_{u2} \\ \vdots \\ x_{uM} \end{bmatrix}$$

и вектора излаза

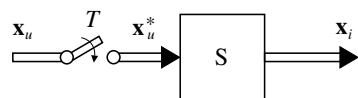
$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{iN} \end{bmatrix}$$

дијаграм вишеструко преносног система је приказан на слици 3.27.



Слика 3.27: Дијаграм вишеструко преносног система S

Дијаграм дискретног вишеструко преносног система је приказан на слици 3.28



Слика 3.28: Дијаграм дискретног вишеструко преносног система S

где је

$$\mathbf{x}_u^* = \begin{bmatrix} x_{u1}^* \\ x_{u2}^* \\ \vdots \\ x_{uM}^* \end{bmatrix} .$$