Аудиторне вежбе из Рачунарског управљања

$z-$ трансформација

Зоран М. Бучевац

Машински факултет у Бгд.

октобар 2011.

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

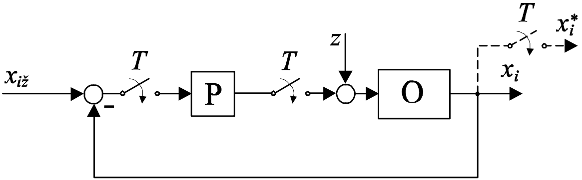
1. За систем аутоматског управљања према (3), (4):

$$\dot{x} = -x + y + 2z, x_i = x, y(k+1) = y(k) + \varepsilon(k) \quad (1)$$

$$x_{i\check{z}}(t) = h(t), z(t) = h(t) \quad (2)$$

одредити z блок дијаграм и z преносну матрицу.

Решење:



Види се да је управљани објект континуалан, као што је иначе случај у највећем броју случајева, и задат својом диференцијалном једначином стања и једначином излаза. Преносна функција објекта по y:

Заврши писмени испит из Рачунарског управљања-мај

$$sX(s) = -X(s) + Y(s) + 2Z(s) \Longrightarrow X(s) = \frac{1}{s+1}Y(s) + \frac{2}{s+1}Z(s) \Longrightarrow$$

$$X_i(s) = X(s) \Longrightarrow X_i(s) = \frac{1}{s+1}Y(s) + \frac{2}{s+1}Z(s) \Longrightarrow$$

$$W_{oy}(s) = \frac{1}{s+1}; W_{oz}(s) = \frac{2}{s+1}$$

z преносна функција објекта по y:

$$W_{oy}(z) = \overline{\mathcal{Z}}\{W_{oy}(s)\} = \overline{\mathcal{Z}}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = \frac{z}{z-e^{-T}}$$

z преносна функција објекта по z не постоји, али постоји фиктивни поремећај $\hat{z}$ чији је z лик:

$$\begin{aligned} \widehat{Z}(z) &= \overline{\mathcal{Z}}\{W_{oz}(s)Z(s)\} = \overline{\mathcal{Z}}\left\{\frac{2}{(s+1)s}\right\} = \overline{\mathcal{Z}}\left\{\frac{2}{s} - \frac{2}{s+1}\right\} = \\ &= \frac{2z}{z-1} - \frac{2z}{z-e^{-T}} = \frac{2\left(1-e^{-T}\right)z}{(z-1)\left(z-e^{-T}\right)} \end{aligned}$$

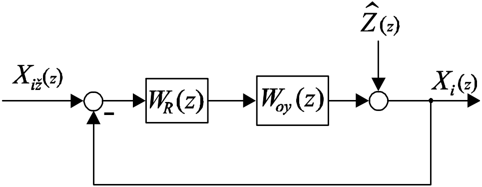
Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

z преносна функција регулатора:

$$\mathcal{Z}\left\{y\left(k+1\right)\right\} = \mathcal{Z}\left\{y\left(k\right)\right\} + \mathcal{Z}\left\{\varepsilon\left(k\right)\right\} \Longrightarrow zY\left(z\right) = Y\left(z\right) + E\left(z\right) \Longrightarrow$$

$$Y\left(z\right) = \frac{1}{z-1}E\left(z\right) \Longrightarrow W_R\left(z\right) = \frac{1}{z-1}; X_{i\check{z}}\left(z\right) = \frac{z}{z-1}$$

z блок дијаграм система:



Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

z преносна матрица:

$$X_i(z) = \widehat{Z}(z) + W_R(z)\,W_{oy}(z)\left[X_{i\check{z}}(z) - X_i(z)\right] \Longrightarrow$$

$$X_i(z) = \frac{W_R(z)\,W_{oy}(z)}{1 + W_R(z)\,W_{oy}(z)} X_{i\check{z}}(z) + \frac{1}{1 + W_R(z)\,W_{oy}(z)} \widehat{Z}(z)$$

$$X_i(z) = \left[\begin{array}{cc} W_{x_{i\check{z}}}(z) & W_{\widehat{z}}(z) \end{array}\right] \mathbf{X}_u(z)\,; \mathbf{X}_u(z) = \left[\begin{array}{cc} X_{i\check{z}}(z) & \widehat{Z}(z) \end{array}\right]^T$$

$$W_{x_{i\check{z}}}(z) = \frac{W_R(z)\,W_{oy}(z)}{1 + W_R(z)\,W_{oy}(z)} = \frac{\frac{1}{z-1}\frac{z}{z-e^{-T}}}{1 + \frac{1}{z-1}\frac{z}{z-e^{-T}}} = \frac{z}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}}$$

$$W_{\widehat{z}}(z) = \frac{1}{1 + W_R(z)\,W_{oy}(z)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{z-1}\frac{z}{z-e^{-T}}} = \frac{z^2 - \left(1 + e^{-T}\right)z + e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}}$$

$$X_i(z) = \mathbf{W}(z)\,\mathbf{X}_u(z) \Longrightarrow$$

$$\mathbf{W}(z) = \left[\begin{array}{cc} W_{x_{i\check{z}}}(z) & W_{\widehat{z}}(z) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \frac{z}{z^2-e^{-T}z+e^{-T}} & \frac{z^2-\left(1+e^{-T}\right)z+e^{-T}}{z^2-e^{-T}z+e^{-T}} \end{array}\right]$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

2. Такође, за САУ према (3), (4) одредити његову векторску једначину понашања.
   Решење:

$$X_i(z) = \mathbf{W}(z)\,\mathbf{X}_u(z) = \begin{bmatrix} \frac{z}{z^2-e^{-T}z+e^{-T}} & \frac{z^2-\left(1+e^{-T}\right)z+e^{-T}}{z^2-e^{-T}z+e^{-T}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{i\check{z}}(z) \\ \widehat{Z}(z) \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$X_i(z)\left(z^2 - e^{-T}z + e^{-T}\right) = zX_{i\check{z}}(z) + \left[z^2 - \left(1+e^{-T}\right)z + e^{-T}\right]\widehat{Z}(z) \Longrightarrow$$

$$z^2X_i(z) - e^{-T}zX_i(z) + e^{-T}X_i(z) = zX_{i\check{z}}(z) + z^2\widehat{Z}(z) - \left(1+e^{-T}\right)z\widehat{Z}(z) + e^{-T}\widehat{Z}(z) \Longrightarrow$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

$$z^2 X_i(z) - e^{-T} z X_i(z) + e^{-T} X_i(z) = \begin{bmatrix} 0 & e^{-T} \end{bmatrix} \mathbf{X}_u(z) +$$
$$+ \begin{bmatrix} 1 & -\left(1 + e^{-T}\right) \end{bmatrix} z \mathbf{X}_u(z) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} z^2 \mathbf{X}_u(z)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{z^2 X_i(z) - e^{-T} z X_i(z) + e^{-T} X_i(z)\right\} =$$
$$= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\mathbf{B}_0 \mathbf{X}_u(z) + \mathbf{B}_1 z \mathbf{X}_u(z) + \mathbf{B}_2 z^2 \mathbf{X}_u(z)\right\} \Longrightarrow$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{z^2 X_i(z)\right\} - \mathcal{Z}^{-1}\left\{e^{-T} z X_i(z)\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{e^{-T} X_i(z)\right\} =$$
$$= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\mathbf{B}_0 \mathbf{X}_u(z)\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\mathbf{B}_1 z \mathbf{X}_u(z)\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\mathbf{B}_2 z^2 \mathbf{X}_u(z)\right\} \Longrightarrow$$

$$x_i(k+2) - e^{-T} x_i(k+1) + e^{-T} x_i(k) =$$
$$= \mathbf{B}_0 \mathbf{x}_u(k) + \mathbf{B}_1 \mathbf{x}_u(k+1) + \mathbf{B}_2 \mathbf{x}_u(k+2)$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

3. Испитати стабилност и управљивост САУ задатог са (3), (4).
   Решење:
   Стабилност:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{W}(z) &= \begin{bmatrix} \frac{z}{z^2-e^{-T}z+e^{-T}} & \frac{z^2-\left(1+e^{-T}\right)z+e^{-T}}{z^2-e^{-T}z+e^{-T}} \end{bmatrix} \Longrightarrow \\
z^*_{1,2} &= \frac{e^{-T} \pm \sqrt{e^{-2T} - 4e^{-T}}}{2} \Longrightarrow \\
z^*_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4e^{T}}}{2e^{T}} \Longrightarrow \\
T &> 0 \Longrightarrow e^{T} > 1 \Longrightarrow 1 - 4e^{T} < 0 \Longrightarrow
\end{aligned}
$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

$$z_{1,2}^* = \frac{1}{2e^T} \pm j\frac{\sqrt{4e^T-1}}{2e^T} \Longrightarrow$$

$$\left|z_{1,2}^*\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2e^T}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4e^T-1}}{2e^T}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{e^T}}$$

Услов стабилности:

$$\left|z_{1,2}^*\right| = \frac{1}{\sqrt{e^T}} < 1 \Longrightarrow e^T > 1$$

Пошто је T по својој природи позитивно онда је e^T увек веће од 1 за било коју вредност T што повлачи да је систем стабилан за било коју вредност периоде одабирања T.

Управљивост:

На основу једначине понашања из задатка 2. одређује се једначина стања и излаза применом одговарајућег алгоритма за избор величина стања:

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

$$x_i(k+2) - e^{-T}x_i(k+1) + e^{-T}x_i(k) = x_{i\check{z}}(k+1) \Longrightarrow$$

$$a_2 = 1, a_1 = -e^{-T}, a_0 = e^{-T}, b_0 = 0, b_1 = 1, b_2 = 0 \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-T} & 1 \\ -e^{-T} & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_2 \\ b_0 - a_0 b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{c} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T \Longrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} e^{-T} & 1 \\ -e^{-T} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_{i\check{z}}(k) \\ x_i(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

Услов управљивости:

$$\det \begin{bmatrix} e^{-T} & 1 \\ -e^{-T} & 0 \end{bmatrix} = e^{-T} = \frac{1}{e^T} \neq 0 \Longrightarrow$$

матрица A система је регуларна $\Longrightarrow$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

$$\mathrm{rang}\begin{bmatrix} \mathbf{b} & A\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & e^{-T} \\ 0 & -e^{-T} \end{bmatrix} = 2; \left(\det\begin{bmatrix} 1 & e^{-T} \\ 0 & -e^{-T} \end{bmatrix} = -e^{-T} \neq 0\right)$$

$$\Longrightarrow$$

Систем је управљив!

4. За САУ према (1), (2) одредити кретање управљаног објекта при свим почетним условима једнаким нули.
   Решење:
   Једначина стања и једначина излаза регулатора:

$$y(k+1) = y(k) + \varepsilon(k) \Longrightarrow y(k+1) - y(k) = \varepsilon(k)$$

$$a_{1R} = 1; a_{0R} = -1; b_{0R} = 1; b_{1R} = 0 \Longrightarrow$$

$$A_R = -a_{0R} = 1; b_R = b_{0R} - a_{0R} b_{1R} = 1; c = 1$$

$$x_R(k+1) = x_R(k) + \varepsilon(k)$$

$$y(k) = x_R(k)$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

Једначина стања и једначина излаза објекта:

$$W_{oy}(z) = \frac{X_i(z)}{Y(z)} = \frac{z}{z - e^{-T}} \Longrightarrow X_i(z)\left(z - e^{-T}\right) = zY(z) \Longrightarrow$$

$$zX_i(z) - e^{-T}X_i(z) = zY(z) \Longrightarrow x_i(k+1) - e^{-T}x_i(k) = y(k+1)$$

$$a_{1O} = 1; a_{0O} = -e^{-T}; b_{0O} = 0; b_{1O} = 1 \Longrightarrow$$

$$A_O = -a_{0O} = e^{-T}; b_O = b_{0O} - a_{0O}b_{1O} = e^{-T}; c_O = 1; d_O = 1$$

$$x_O(k+1) = e^{-T}x_O(k) + e^{-T}y(k)$$

$$x_i(k) = x_O(k) + y(k)$$

Једначина стања и једначина излаза целог система:

$$\begin{aligned} x_O(k+1) &= e^{-T}x_O(k) + e^{-T}y(k) \\ x_R(k+1) &= x_R(k) + \varepsilon(k) \end{aligned}$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

$$\begin{aligned} x_i(k) &= x_O(k) + y(k) \\ y(k) &= x_R(k) \\ &\Longrightarrow \end{aligned}$$

$$x_O(k+1) = e^{-T} x_O(k) + e^{-T} x_R(k);$$

$$x_R(k+1) = x_R(k) + x_{i\check{z}}(k) - x_i(k) = -x_O(k) + x_{i\check{z}}(k)$$

$$x_i(k) = x_O(k) + y(k) = x_O(k) + x_R(k) \Longrightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_O \\ x_R \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} e^{-T} & e^{-T} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_{i\check{z}}(k) \\ x_i(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

Кретање:

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}x_{i\check{z}}(k) \Longrightarrow$$

$$\mathcal{Z}\{\mathbf{x}(k+1)\} = \mathcal{Z}\{A\mathbf{x}(k)\} + \mathcal{Z}\{\mathbf{b}x_{i\check{z}}(k)\} \Longrightarrow$$

$$zX(z) = AX(z) + \mathbf{b}X_{i\check{z}}(z) \Longrightarrow X(z) = (zI - A)^{-1}\mathbf{b}X_{i\check{z}}(z) \Longrightarrow$$

$$(zI - A) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e^{-T} & e^{-T} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z - e^{-T} & -e^{-T} \\ 1 & z \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\det(zI - A) = z^2 - e^{-T}z + e^{-T}; \mathrm{adj}(zI - A) = \begin{bmatrix} z & e^{-T} \\ -1 & z - e^{-T} \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$(zI - A)^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(zI - A)}{\det(zI - A)} = \begin{bmatrix} \frac{z}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} & \frac{e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} \\ \frac{-1}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} & \frac{z - e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$(zI - A)^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{z}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} & \frac{e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} \\ \frac{-1}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} & \frac{z - e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} \\ \frac{z - e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} \end{bmatrix};$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

$$X_{i\check{z}}(z) = \frac{z}{z-1} \Longrightarrow (zI - A)^{-1} \mathbf{b} X_{i\check{z}}(z) = \begin{bmatrix} \frac{e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} \frac{z}{z-1} \\ \frac{z - e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} \frac{z}{z-1} \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$X(z) = \begin{bmatrix} \frac{e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} \frac{z}{z-1} \\ \frac{z - e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} \frac{z}{z-1} \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_O \\ \chi_R \end{bmatrix} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{X(z)\right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} \frac{e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} \frac{z}{z-1} \\ \frac{z - e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} \frac{z}{z-1} \end{bmatrix} \right\}$$

Пошто се тражи само кретање управљаног објекта, то значи да треба одредити само $\chi_O :\Longrightarrow$

$$\chi_O = \mathcal{Z}^{-1}\left\{ \frac{e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} \frac{z}{z-1} \right\}$$

Функција $X_O(z)$ се развија у Хефисајдов развој:

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

$$X_O(z) = \frac{e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}}\frac{z}{z-1} \Longrightarrow$$
$$\widehat{X}_O(z) = \frac{e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}}\frac{1}{z-1}$$

Сви полови су једноструки:

$$z_1^* = 1; z_{2,3}^* = \frac{1}{2e^T} \pm j\frac{\sqrt{4e^T - 1}}{2e^T}$$
$$R_i = \left.\frac{e^{-T}}{\left[\left(z^2 - e^{-T}z + e^{-T}\right)(z-1)\right]'}\right|_{z_i^*} =$$
$$= \left.\frac{e^{-T}}{(z-1)\left(2z - e^{-T}\right) + \left(z^2 - e^{-T}z + e^{-T}\right)}\right|_{z_i^*}$$
$$R_1 = \left.\frac{e^{-T}}{(z-1)\left(2z - e^{-T}\right) + \left(z^2 - e^{-T}z + e^{-T}\right)}\right|_{z_1^*=1} = e^{-T}$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

$$R_2 = \left. \frac{e^{-T}}{(z-1)(2z-e^{-T}) + (z^2 - e^{-T}z + e^{-T})} \right|_{z_2^* = \frac{1}{2e^T} + j\frac{\sqrt{4e^T-1}}{2e^T}} =$$

$$= \left. \frac{e^{-T}}{z^2 - 2z} \right|_{z_2^* = \frac{1}{2e^T} + j\frac{\sqrt{4e^T-1}}{2e^T}}$$

$$R_3 = \left. \frac{e^{-T}}{(z-1)(2z-e^{-T}) + (z^2 - e^{-T}z + e^{-T})} \right|_{z_3^* = \frac{1}{2e^T} - j\frac{\sqrt{4e^T-1}}{2e^T}} =$$

$$= \left. \frac{e^{-T}}{z^2 - 2z} \right|_{z_3^* = \frac{1}{2e^T} - j\frac{\sqrt{4e^T-1}}{2e^T}}$$

$$\widehat{X}_O(z) = \frac{R_1}{z-1} + \frac{R_2}{z-z_2^*} + \frac{R_3}{z-z_3^*} \Longrightarrow$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

$$
\begin{aligned}
X_O(z) &= R_1 \frac{z}{z-1} + R_2 \frac{z}{z-z_2^*} + R_3 \frac{z}{z-z_3^*} \\
\chi_O &= R_1 h(k) + R_2 \left(z_2^*\right)^{kT} + R_3 \left(z_3^*\right)^{kT}
\end{aligned}
$$