Аудиторне вежбе из Рачунарског управљања

$z-$ трансформација

Зоран М. Бучевац

Машински факултет у Бгд.

октобар 2011.

1. Одредити $Z-$ лик сигнала $x(t)$ $(\mathcal{Z}\{x(t)\})$ ако је
   $X(s) = \frac{1}{s(s+\alpha)}$?
   Решење:
   3. облик

$X^*(s) = \sum_i \mathrm{Res}\ \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} X(p)\Big|_{p=p_i^*} \implies X(p) = \frac{1}{p(p+\alpha)} \implies p_1^* = 0; p_2^* = -\alpha$

$$X^*(s) = \sum_{i=1}^{2} \mathrm{Res}\ \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} X(p)\Big|_{p=p_i^*} = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} \mathrm{Res}\ X(p)\big|_{p=p_i^*} =$$
$$\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} \frac{1}{[p(p+\alpha)]'}\Big|_{p=p_i^*} = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} \frac{1}{2p+\alpha}\Big|_{p=p_i^*} =$$
$$\frac{1}{1-e^{p_1^*T}e^{-sT}} \frac{1}{2p_1^*+\alpha} + \frac{1}{1-e^{p_2^*T}e^{-sT}} \frac{1}{2p_2^*+\alpha} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{1-e^{-\alpha T}e^{-sT}} \frac{1}{\alpha} =$$
$$\frac{1}{\alpha} \frac{1-e^{-\alpha T}e^{-sT}-1+e^{-sT}}{\left(1-e^{-sT}\right)\left(1-e^{-\alpha T}e^{-sT}\right)} = \frac{1}{\alpha} \frac{e^{-sT}\left(1-e^{-\alpha T}\right)}{\left(1-e^{-sT}\right)\left(1-e^{-\alpha T}e^{-sT}\right)} \implies$$

$z = e^{sT} \Longrightarrow X(z) = X^*(s)\big|_{e^{sT}=z} = \frac{1}{\alpha}\frac{e^{-sT}\left(1-e^{-\alpha T}\right)}{\left(1-e^{-sT}\right)\left(1-e^{-\alpha T}e^{-sT}\right)}\Bigg|_{e^{sT}=z} =$

$\frac{1}{\alpha}\frac{z^{-1}\left(1-e^{-\alpha T}\right)}{(1-z^{-1})\left(1-e^{-\alpha T}z^{-1}\right)} = \frac{z}{\alpha}\frac{1-e^{-\alpha T}}{(z-1)\left(z-e^{-\alpha T}\right)} \Longrightarrow$

$X(z) = \frac{z}{\alpha}\frac{1-e^{-\alpha T}}{(z-1)\left(z-e^{-\alpha T}\right)}$

2. Дат је $Z-$ лик $X(z) = \frac{z}{(z-\gamma)(z-1)^2}$. Одредити дискретизовани сигнал $x^*(t)$?

   Решење:

   1. начин:

   $x(kT) = \sum_i \mathrm{Res}\, X(z)\, z^{k-1}\big|_{z_i^*(\text{пол од } X(z))}$

   $z_1^* = \gamma, \nu_1^* = 1; z_2^* = 1, \nu_2^* = 2 \Longrightarrow x(kT) = \sum_{i=1}^{2} \mathrm{Res}\, X(z)\, z^{k-1}\big|_{z_i^*}$

   $\mathrm{Res}\, X(z)\, z^{k-1}\big|_{z_1^*=\gamma} = \mathrm{Res}\, \frac{z}{(z-\gamma)(z-1)^2} z^{k-1}\Bigg|_{z_1^*=\gamma} =$

$$\operatorname{Res} \left.\frac{z^k}{(z-\gamma)(z-1)^2}\right|_{z_1^*=\gamma} = \left.\frac{z^k}{\left[(z-\gamma)(z-1)^2\right]'}\right|_{z_1^*=\gamma} = \left.\frac{z^k}{(z-1)^2+2(z-\gamma)(z-1)}\right|_{z_1^*=\gamma} = \frac{\gamma^k}{(\gamma-1)^2}$$

$$\operatorname{Res} X(z)\, z^{k-1}\Big|_{z_2^*=1} = R_{21} = \frac{1}{(\nu_2^*-1)!}\frac{d^{\nu_2^*-1}}{dz^{\nu_2^*-1}}\left.\left[(z-z_2^*)^{\nu_2^*} X(z)\, z^{k-1}\right]\right|_{z_2^*=1}$$

$$R_{21} = \frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left.\left[(z-1)^2 X(z)\, z^{k-1}\right]\right|_{z_2^*=1} =$$

$$\frac{d}{dz}\left.\left[(z-1)^2 \frac{z}{(z-\gamma)(z-1)^2} z^{k-1}\right]\right|_{z_2^*=1} = \frac{d}{dz}\left.\frac{z^k}{(z-\gamma)}\right|_{z_2^*=1} =$$

$$\left.\frac{kz^{k-1}(z-\gamma)-z^k}{(z-\gamma)^2}\right|_{z_2^*=1} = \frac{k(1-\gamma)-1}{(1-\gamma)^2} = \frac{k}{(1-\gamma)} - \frac{1}{(1-\gamma)^2} \Longrightarrow$$

$$x(kT) = \frac{\gamma^k}{(\gamma-1)^2} + \frac{k}{(1-\gamma)} - \frac{1}{(1-\gamma)^2} = \frac{\gamma^k-1}{(\gamma-1)^2} + \frac{k}{(1-\gamma)} \Longrightarrow x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\gamma^k-1}{(\gamma-1)^2} + \frac{k}{(1-\gamma)}\right]\delta(t-kT)$$

2. начин:
Из табличе $z-$ трансформација у уџбенику Дискретни системи, на 184. страни, 3. случај одозго
$X(z) = \frac{z}{(z-\gamma)(z-1)^2} \Longrightarrow \frac{\gamma^k}{(\gamma-1)^2} + \frac{k}{(1-\gamma)} - \frac{1}{(1-\gamma)^2}$ (у уџбенику постоји грешка тј. тамо стоји $\frac{\gamma}{(\gamma-1)^2} + \frac{k}{(1-\gamma)} - \frac{1}{(1-\gamma)^2}$ а треба да стоји $\frac{\gamma^k}{(\gamma-1)^2} + \frac{k}{(1-\gamma)} - \frac{1}{(1-\gamma)^2}$)

3. начин:
$X(z) = \frac{z}{(z-\gamma)(z-1)^2} \Longrightarrow \widehat{X}(z) = z^{-1}\frac{z}{(z-\gamma)(z-1)^2} = \frac{1}{(z-\gamma)(z-1)^2} \Longrightarrow$Хевисајдов развој од
$\widehat{X}(z) = \frac{1}{(z-\gamma)(z-1)^2} \Longrightarrow z_1^* = \gamma; z_2^* = 1, \nu_2^* = 2 \Longrightarrow R_1 = \left.\frac{1}{[(z-\gamma)(z-1)^2]\prime}\right|_{z_1^*=\gamma} = \left.\frac{1}{(z-1)^2+2(z-\gamma)(z-1)}\right|_{z_1^*=\gamma} = \frac{1}{(\gamma-1)^2}$

$$R_{21} = \frac{1}{(\nu_2^*-1)!}\frac{d^{\nu_2^*-1}}{dz^{\nu_2^*-1}}\left[(z-z_2^*)^{\nu_2^*}\widehat{X}(z)\right]\Bigg|_{z_2^*=1} =$$

$$\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{1}{(z-\gamma)(z-1)^2}\right]\Bigg|_{z_2^*=1} = -\frac{1}{(z-\gamma)^2}\Bigg|_{z_2^*=1} = -\frac{1}{(1-\gamma)^2}$$

$$R_{22} = \frac{1}{(\nu_2^*-2)!}\frac{d^{\nu_2^*-2}}{dz^{\nu_2^*-2}}\left[(z-z_2^*)^{\nu_2^*}\widehat{X}(z)\right]\Bigg|_{z_2^*=1} =$$

$$\frac{1}{(2-2)!}\left[(z-1)^2\frac{1}{(z-\gamma)(z-1)^2}\right]\Bigg|_{z_2^*=1} = \frac{1}{1-\gamma}$$

$$\widehat{X}(z) = \frac{R_1}{z-z_1^*} + \frac{R_{21}}{z-z_2^*} + \frac{R_{22}}{\left(z-z_2^*\right)^2} = \frac{1}{(\gamma-1)^2}\frac{1}{z-\gamma} - \frac{1}{(1-\gamma)^2}\frac{1}{z-1} + \frac{1}{1-\gamma}\frac{1}{(z-1)^2} \Longrightarrow$$

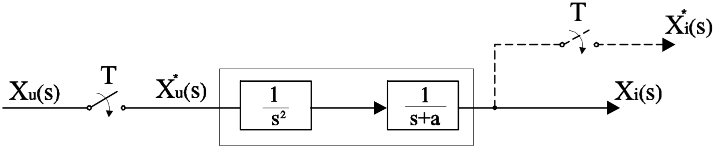
$$X(z) = z\widehat{X}(z) = \frac{1}{(\gamma-1)^2}\frac{z}{z-\gamma} - \frac{1}{(1-\gamma)^2}\frac{z}{z-1} + \frac{1}{1-\gamma}\frac{z}{(z-1)^2}$$

први и други сабирак је таблични случај на страни 186, 6. одозго, а трећи сабирак је 8. случај одозго на истој страни $\Longrightarrow$

$$X(z) = \frac{1}{(\gamma-1)^2}\gamma^k - \frac{1}{(1-\gamma)^2}1^k + \frac{1}{1-\gamma}k1^{k-1} = \frac{\gamma^k}{(\gamma-1)^2} - \frac{1}{(1-\gamma)^2} + \frac{k}{1-\gamma} =$$

$\frac{\gamma^k-1}{(\gamma-1)^2}+\frac{k}{1-\gamma}$

3. Одредити $W(z)$ система са слике:

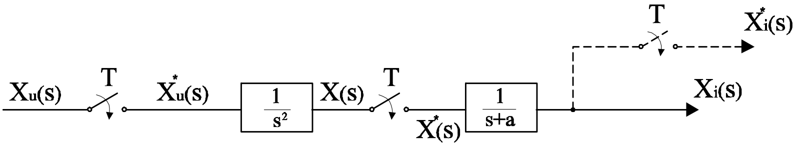


Решење:

$W(s)=\frac{1}{s^2}\frac{1}{s+a}\Longrightarrow W(z)=\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2}\frac{1}{s+a}\right\}\Longrightarrow$Таблица $z-$ трансформација, страна 181, 5. случај одозго:

$\frac{1}{s^2}\frac{1}{s+a}\Longrightarrow\frac{(T/a)z}{(z-1)^2}-\frac{\left(1-e^{aT}\right)z}{a^2(z-1)\left(z-e^{-aT}\right)}\Longrightarrow W(z)=$ $\frac{1}{a}\frac{z}{z-1}\left[\frac{T}{z-1}-\frac{\left(1-e^{aT}\right)}{a\left(z-e^{-aT}\right)}\right]$

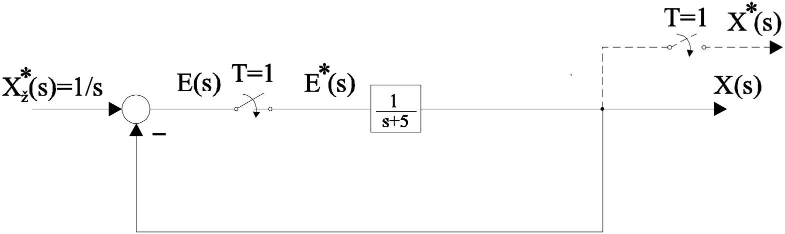
4. Одредити $W(z)$ система са слике:



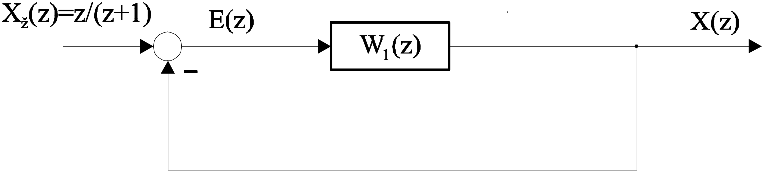
Решење:

$W_1(s) = \frac{1}{s^2}; W_2(s) = \frac{1}{s+a} \Longrightarrow W(z) = W_1(z)\, W_2(z) =$
$\overline{\mathcal{Z}}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \overline{\mathcal{Z}}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} \Longrightarrow$Таблица $z-$ трансформација, страна 181, 4. и 3. случај одозго:
$\frac{1}{s^2} \Longrightarrow \frac{Tz}{(z-1)^2}; \frac{1}{s+a} \Longrightarrow \frac{z}{\left(z-e^{-aT}\right)} \Longrightarrow W(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}\frac{z}{\left(z-e^{-aT}\right)} =$
$\frac{Tz^2}{(z-1)^2\left(z-e^{-aT}\right)}$

5. За дискретан систем приказан на слици одредити:
   а) $z-$ блок дијаграм система
   б) $z-$ трансформацију регулисане величине x
   в) дискретизовани одзив система x^*
   г) крајњу вредност излазне дискретизоване величине $x^*(\infty)$
   д) грешку дискретизоване регулисане величине ε^* при свим почетним условима једнаким нули?



Решење:



a)

$W_1(s) = \frac{1}{s+5} \Longrightarrow W_1(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s+5}\right\} \Longrightarrow$ из задатка бр. 4 $\Longrightarrow \frac{1}{s+5} \Longrightarrow \frac{z}{z-e^{-5}} \Longrightarrow W_1(z) = \frac{z}{z-e^{-5}}$

б) $W(z) = \frac{W_1(z)}{1+W_1(z)} = \frac{\frac{z}{z-e^{-5}}}{1+\frac{z}{z-e^{-5}}} = \frac{\frac{z}{z-e^{-5}}}{\frac{z-e^{-5}+z}{z-e^{-5}}} = \frac{z}{2z-e^{-5}}; X(z) = W(z)X_ž(z) \Longrightarrow X(z) = \frac{z}{z-1}\frac{z}{2z-e^{-5}}$

в) $X(z) = \frac{z}{z-1}\frac{z}{2z-e^{-5}} \Longrightarrow \widehat{X}(z) = z^{-1}X(z) = \frac{1}{z-1}\frac{z}{2z-e^{-5}} \Longrightarrow$Хевисајдов развој од $\widehat{X}(z) = \frac{1}{z-1}\frac{z}{2z-e^{-5}} \Longrightarrow$
$z_1^* = 1; z_2^* = \frac{e^{-5}}{2} =$
$3.369\,0 \times 10^{-3} = e^{-5{,}693} \Longrightarrow R_1 = \frac{z}{[(z-1)(2z-e^{-5})]'}\Big|_{z_1^*=1} =$

$$\left.\frac{z}{2(z-1)+(2z-e^{-5})}\right|_{z_1^*=1}=\frac{1}{(2-e^{-5})}=0.501\,69;\ R_2=$$
$$\left.\frac{z}{[(z-1)(2z-e^{-5})]'}\right|_{z_2^*=\frac{e^{-5}}{2}}=\left.\frac{z}{2(z-1)+(2z-e^{-5})}\right|_{z_2^*=\frac{e^{-5}}{2}}=\frac{\frac{e^{-5}}{2}}{2\left(\frac{e^{-5}}{2}-1\right)}=$$
$$-1.690\,2\times 10^{-3}\Longrightarrow \widehat{X}(z)=\frac{R_1}{z-z_1^*}+\frac{R_2}{z-z_2^*}\Longrightarrow X(z)=z\widehat{X}(z)=$$
$$R_1\frac{z}{z-z_1^*}+R_2\frac{z}{z-z_2^*}\Longrightarrow X(z)=$$
$$0.501\,69\frac{z}{z-1}-1.690\,2\times 10^{-3}\frac{z}{z-e^{-5,693}}\Longrightarrow x(k)=$$
$$0.501\,69h(k)-1.690\,2\times 10^{-3}e^{-5,693k}\Longrightarrow x^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}x(k)\,\delta(t-k)=$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(0.501\,69h(k)-1.690\,2\times 10^{-3}e^{-5,693k}\right)\delta(t-k)=$$
$$0.501\,69\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-k)-1.690\,2\times 10^{-3}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-5,693k}\delta(t-k)$$

г) Крајња вредност за x^* се одређује на основу граничне теореме $z-$ трансформације:
Функција $(z-1)\,X(z) = (z-1)\,\frac{z}{z-1}\,\frac{z}{2z-e^{-5}} = \frac{z^2}{2z-e^{-5}}$ нема полове на јединичној кружници нити ван јединичног круга а постоји гранична вредност $\lim_{z\to 1}(z-1)\,X(z) \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} x^*(\infty) &= \lim_{z\to 1}(z-1)\,X(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\,\frac{z}{z-1}\,\frac{z}{2z-e^{-5}} = \\ &= \lim_{z\to 1}\frac{z^2}{2z-e^{-5}} = \frac{1}{2-e^{-5}} = 0.501\,69 \end{aligned}$$

д) На основу $z-$ блок дијаграма система се добија:
$E(z) = X_{\check{z}}(z) - X(z) = X_{\check{z}}(z) - W_1(z)\,E(z) \Longrightarrow$
$[1+W_1(z)]\,E(z) = X_{\check{z}}(z) \Longrightarrow E(z) = \frac{1}{1+W_1(z)}X_{\check{z}}(z) =$
$\frac{1}{1+\frac{z}{z-e^{-5}}}\,\frac{z}{z-1} = \frac{z-e^{-5}}{z-e^{-5}+z}\,\frac{z}{z-1} = \frac{z-e^{-5}}{2z-e^{-5}}\,\frac{z}{z-1} \Longrightarrow$

$$\widehat{E}(z) = z^{-1}E(z) = \frac{z-e^{-5}}{(2z-e^{-5})(z-1)} \Longrightarrow z_1^* = 1;\, z_2^* = \frac{e^{-5}}{2} = 3.369\,0 \times 10^{-3} \Longrightarrow R_1 = \left.\frac{z-e^{-5}}{[(z-1)(2z-e^{-5})]'}\right|_{z_1^*=1} = \left.\frac{z-e^{-5}}{2(z-1)+(2z-e^{-5})}\right|_{z_1^*=1} = \frac{1-e^{-5}}{(2-e^{-5})} = 0.498\,31;\, R_2 = \left.\frac{z-e^{-5}}{[(z-1)(2z-e^{-5})]'}\right|_{z_2^*=\frac{e^{-5}}{2}} =$$

$$\left.\frac{z-e^{-5}}{2(z-1)+(2z-e^{-5})}\right|_{z_2^*=\frac{e^{-5}}{2}} = \frac{\frac{e^{-5}}{2}-e^{-5}}{2\left(\frac{e^{-5}}{2}-1\right)} = \frac{-\frac{e^{-5}}{2}}{2\left(\frac{e^{-5}}{2}-1\right)} = 1.\,690\,2 \times 10^{-3} \Longrightarrow$$

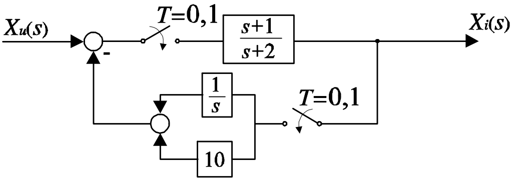
$$\widehat{E}(z) = \frac{R_1}{z-z_1^*} + \frac{R_2}{z-z_2^*} \Longrightarrow E(z) = z\widehat{E}(z) = R_1\frac{z}{z-z_1^*} + R_2\frac{z}{z-z_2^*}$$

$$\Longrightarrow E(z) = 0.498\,3\frac{z}{z-1} + 1.690\,2 \times 10^{-3}\frac{z}{z-e^{-5,693}} \Longrightarrow \varepsilon(k) = 0.498\,3h(k) + 1.690\,2 \times 10^{-3}e^{-5,693k} \Longrightarrow \varepsilon^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon(k)\,\delta(t-k) =$$

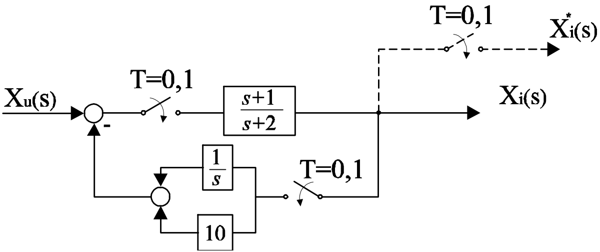
$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(0.498\,3h(k) + 1.690\,2 \times 10^{-3}e^{-5,693k}\right)\delta(t-k) =$$

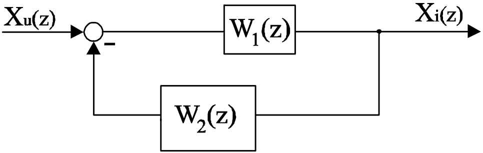
$$0.498\,3\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-k) + 1.690\,2 \times 10^{-3}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-5,693k}\delta(t-k)$$

6. Одредити $z-$ блок дијаграм за систем са слике:



Решење:





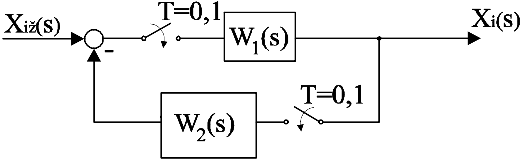
$W_1(z) = \overline{\mathcal{Z}}\left\{\frac{s+1}{s+2}\right\} = \overline{\mathcal{Z}}\left\{1 - \frac{1}{s+2}\right\} = 1 - \frac{z}{z-e^{-0,2}} = \frac{-e^{-0,2}}{z-e^{-0,2}}$; $W_2(z) = \overline{\mathcal{Z}}\left\{\frac{1}{s} + 10\right\} = 10 + \frac{z}{z-1} = \frac{11z-10}{z-1}$

7. Одредити $z-$ преносну функцију за систем из задатка 6?
   Решење:

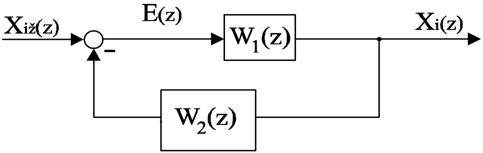
$$W(z) = \frac{W_1(z)}{1+W_1(z)W_2(z)} = \frac{\frac{-e^{-0,2}}{z-e^{-0,2}}}{1+\frac{-e^{-0,2}}{z-e^{-0,2}}\frac{11z-10}{z-1}} = \frac{\frac{-e^{-0,2}}{z-e^{-0,2}}}{\frac{(z-e^{-0,2})(z-1)-e^{-0,2}(11z-10)}{(z-e^{-0,2})(z-1)}} =$$

$$\frac{-e^{-0,2}(z-1)}{(z-e^{-0,2})(z-1)-e^{-0,2}(11z-10)} = \frac{-e^{-0,2}z+e^{-0,2}}{z^2-(1+12e^{-0,2})z+11e^{-0,2}}$$

8. Одредити дискретну грешку САУ са слике:



при: $W_1(s) = \frac{s+1}{s+2}; W_2(s) = \frac{1}{s}; X_{i\check{z}}(s) = \frac{1}{s}$
Решење:



$$W_1(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{s+1}{s+2}\right\} = \mathcal{Z}\left\{1 - \frac{1}{s+2}\right\} = 1 - \frac{z}{z-e^{-0,2}} = \frac{-e^{-0,2}}{z-e^{-0,2}};$$

$$W_2(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}\right\} = \frac{z}{z-1}; X_{i\check{z}}(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}\right\} = \frac{z}{z-1}$$

$\Longrightarrow E(z) = X_{i\check{z}}(z) - W_2(z) X_i(z) = X_{i\check{z}}(z) - W_2(z) W_1(z) E(z) \Longrightarrow$
$E(z) = \frac{1}{1+W_1(z)W_2(z)} X_{i\check{z}}(z) = \frac{\left(z-e^{-0,2}\right)z}{(z-e^{-0,2})(z-1)-e^{-0,2}z} =$
$\frac{\left(z-e^{-0,2}\right)z}{z^2-(1+2e^{-0,2})z+e^{-0,2}} \Longrightarrow \widehat{E}(z) = z^{-1}E(z) = \frac{\left(z-e^{-0,2}\right)}{z^2-(1+2e^{-0,2})z+e^{-0,2}} \Longrightarrow$
Хевисајдов развој функције $\widehat{E}(z)$, полови функције $\widehat{E}(z)$:
$z_{1,2}^* = \frac{\left(1+2e^{-0,2}\right) \pm \sqrt{(1+2e^{-0,2})^2-4e^{-0,2}}}{2} \Longrightarrow \frac{\left(1+2e^{-0.2}\right)+\sqrt{(1+2e^{-0.2})^2-4e^{-0.2}}}{2} =$
$2.278\,1; \frac{\left(1+2e^{-0.2}\right)-\sqrt{(1+2e^{-0.2})^2-4e^{-0.2}}}{2} = 0.359\,40 \Longrightarrow$
$\widehat{E}(z) = \frac{R_1}{z-z_1^*} + \frac{R_2}{z-z_2^*} \Longrightarrow E(z) = z\widehat{E}(z) = R_1 \frac{z}{z-z_1^*} + R_2 \frac{z}{z-z_2^*} \Longrightarrow$
таблица $z-$ трансформација (уџбеник), страна 186, последњи случај $\varepsilon(k) = R_1 \left(z_1^*\right)^{kT} + R_2 \left(z_2^*\right)^{kT}$; $R_1 = \left.\frac{\left(z-e^{-0,2}\right)}{[z^2-(1+2e^{-0,2})z+e^{-0,2}]'}\right|_{z=z_1^*} =$
$\left.\frac{\left(z-e^{-0,2}\right)}{2z-(1+2e^{-0,2})}\right|_{z=z_1^*} = 0.761; R_2 = \left.\frac{\left(z-e^{-0,2}\right)}{[z^2-(1+2e^{-0,2})z+e^{-0,2}]'}\right|_{z=z_2^*} =$
$0.239\,4 \Longrightarrow$

$$\varepsilon(k) = R_1 (z_1^*)^{kT} + R_2 (z_2^*)^{kT} = 0.761\,(2.278\,1)^{0.1k} + 0.239\,4\,(0.359\,40)^{0.1k}$$

9. За систем из задатка 8 одредити дискретну једначину понашања?

   Решење:

$$X_i(z) = W(z)\,X_{i\check{z}}(z) = \frac{W_1(z)}{1+W_1(z)W_2(z)} X_{i\check{z}}(z) =$$

$$\frac{\frac{-e^{-0,2}}{z-e^{-0,2}}}{1+\frac{-e^{-0,2}}{z-e^{-0,2}}\frac{z}{z-1}} X_{i\check{z}}(z) =$$

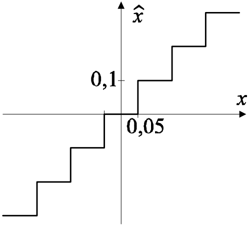
$$\frac{-e^{-0,2}(z-1)}{(z-e^{-0,2})(z-1)-e^{-0,2}z} X_{i\check{z}}(z) = \frac{-e^{-0,2}z+e^{-0,2}}{z^2-(1+2e^{-0,2})z+e^{-0,2}} X_{i\check{z}}(z) \Longrightarrow$$

$$\left[z^2 - \left(1+2e^{-0,2}\right)z + e^{-0,2}\right] X_i(z) = \left(-e^{-0,2}z + e^{-0,2}\right) X_{i\check{z}}(z) \Longrightarrow$$

$$z^2 X_i(z) - \left(1+2e^{-0,2}\right) z X_i(z) + e^{-0,2} X_i(z) =$$
$$-e^{-0,2} z X_{i\check{z}}(z) + e^{-0,2} X_{i\check{z}}(z) \Longrightarrow$$

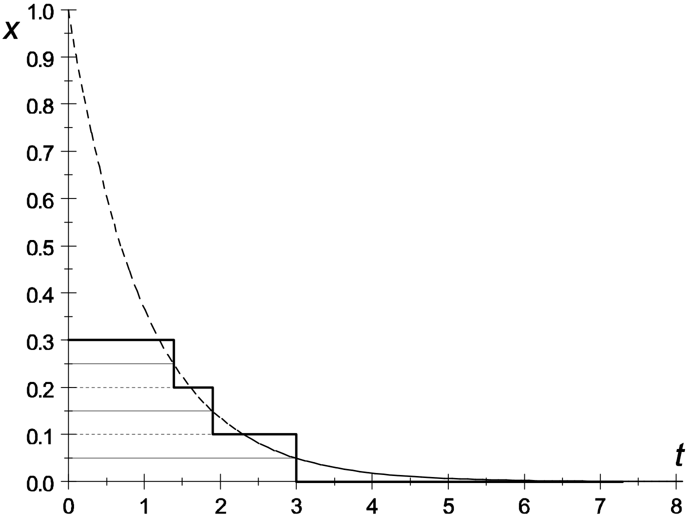
$$x_i\left(k+2\right)-\left(1+2e^{-0,2}\right)x_i\left(k+1\right)+e^{-0,2}x_i\left(k\right)=$$
$$-e^{-0,2}x_{i\check{z}}\left(k+1\right)+e^{-0,2}x_{i\check{z}}\left(k\right)$$

1. Графички одредити излазни сигнал предајника који садржи нелинеарност приказану на слици, а за улазни сигнал $x(t) = e^{-t}h(t)$:



Решење:

Први колоквијум из Рачунарског управљања



2. Одредити сва три облика комплексног лика излазног сигнала $x^*(t)$ идеалног одабирача ако је његов улазни сигнал x:

$$x(t) = (5\sin 2t)\, h(t)\,.$$

Такође, одредити све нуле и полове тог комплексног лика?
Решење:
1. облик:
$x(t) = (5\sin 2t)\, h(t) = 5\left(\frac{e^{j2t} - e^{-j2t}}{2j}\right) h(t) = C\left(e^{j2t} - e^{-j2t}\right) h(t)$;
$C = \frac{5}{2j}$
$X^*(s) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x(kT)\, e^{-kTs} \Longrightarrow X^*(s) =$
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} C\left(e^{j2kT} - e^{-j2kT}\right) e^{-kTs} =$
$C\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{j2kT} e^{-kTs} - e^{-j2kT} e^{-kTs}\right) =$

$$C\left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{j2kT}e^{-kTs} - \sum_{k=0}^{\infty} e^{-j2kT}e^{-kTs}\right) =$$

$$C\left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{kT(j2-s)} - \sum_{k=0}^{\infty} e^{kT(-j2-s)}\right) = C\frac{1}{1-e^{-T(s-2j)}} - C\frac{1}{1-e^{-T(s+2j)}} =$$

$$\frac{5}{2j}\left(\frac{1}{1-e^{-Ts}e^{j2T}} - \frac{1}{1-e^{-Ts}e^{-j2T}}\right) = \frac{5}{2j}\left(\frac{\left[1-e^{-Ts}e^{-j2T}\right]-\left[1-e^{-Ts}e^{j2T}\right]}{\left[1-e^{-Ts}e^{j2T}\right]\left[1-e^{-Ts}e^{-j2T}\right]}\right) =$$

$$\frac{5e^{-Ts}\left(\frac{e^{j2T}-e^{-j2T}}{2j}\right)}{1-2e^{-Ts}\frac{\left(e^{j2T}+e^{-j2T}\right)}{2}+e^{-2Ts}} = \frac{5e^{-Ts}\sin 2T}{1-2e^{-Ts}\cos 2T+e^{-2Ts}}$$

$$\Longrightarrow X^*(s) = \frac{5e^{-Ts}\sin 2T}{1-2e^{-Ts}\cos 2T+e^{-2Ts}}$$

2. облик

$$X^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s+jk\omega_0) \Longrightarrow X(s) = \mathcal{L}\{(5\sin 2t)\,h(t)\} = \frac{10}{s^2+4}$$

$$X^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s+jk\omega_0) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{10}{(s+jk\omega_0)^2+4}$$

3. облик

$X^*(s) = \sum_i \mathrm{Res}\, \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} X(p)\Big|_{p=p_i^*} \implies X(p) = \frac{10}{p^2+4} \implies p_1^* = +2j,\ p_2^* = -2j$

$$X^*(s) = \sum_{i=1}^{2} \mathrm{Res}\, \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} X(p)\Big|_{p=p_i^*} = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}}\, \mathrm{Res}\, X(p)|_{p=p_i^*} =$$

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}}\ \frac{10}{[p^2+4]'}\Big|_{p=p_i^*} = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}}\ \frac{5}{p}\Big|_{p=p_i^*} =$$

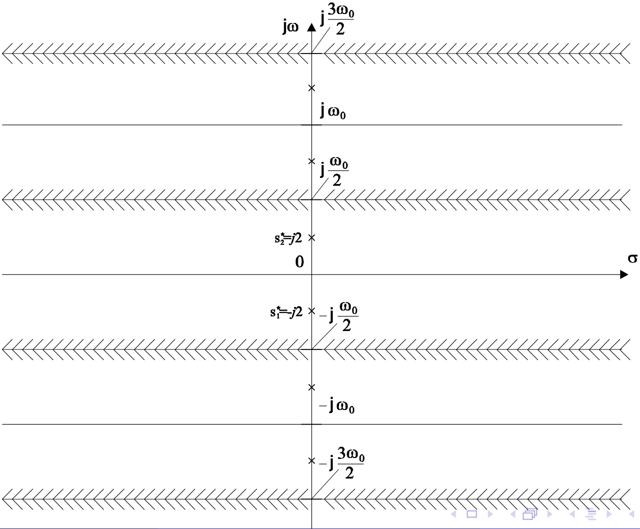
$$\frac{1}{1-e^{p_1^*T}e^{-sT}}\frac{5}{p_1^*} + \frac{1}{1-e^{p_2^*T}e^{-sT}}\frac{5}{p_2^*} = \frac{5}{1-e^{j2T}e^{-sT}}\frac{1}{2j} + \frac{5}{1-e^{-j2T}e^{-sT}}\frac{1}{-2j} =$$

$$\frac{-j2{,}5}{1-e^{j2T}e^{-sT}} + \frac{j2{,}5}{1-e^{-j2T}e^{-sT}} =$$

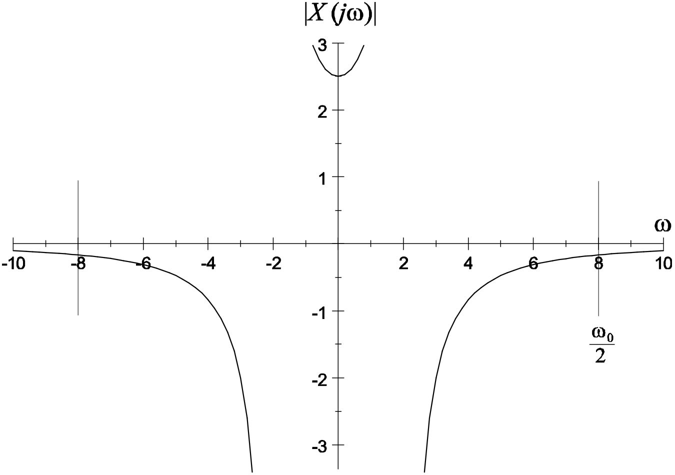
$$\frac{-j2{,}5\left(1-e^{-j2T}e^{-sT}\right)+j2{,}5\left(1-e^{j2T}e^{-sT}\right)}{\left(1-e^{j2T}e^{-sT}\right)\left(1-e^{-j2T}e^{-sT}\right)} = \frac{j2{,}5\left(1-e^{j2T}e^{-sT}-1+e^{-j2T}e^{-sT}\right)}{\left(1-e^{j2T}e^{-sT}\right)\left(1-e^{-j2T}e^{-sT}\right)} =$$

$$\frac{-j2{,}5e^{-sT}2j\frac{\left(e^{j2T}-e^{-j2T}\right)}{2j}}{1-e^{j2T}e^{-sT}-e^{-j2T}e^{-sT}+e^{j2T}e^{-sT}e^{-j2T}e^{-sT}} =$$

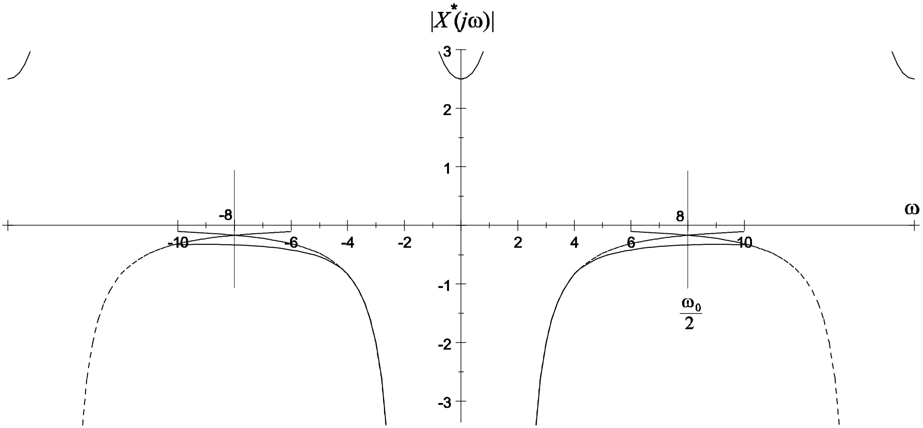
$$\frac{5e^{-sT}\sin 2T}{1-2e^{-sT}\frac{\left(e^{j2T}+e^{-j2T}\right)}{2}+e^{-2sT}}=\frac{5e^{-sT}\sin 2T}{1-2e^{-sT}\cos 2T+e^{-2sT}}$$

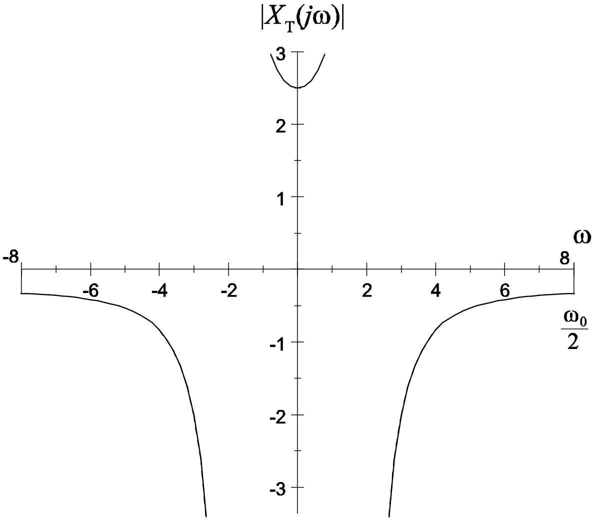


3. Нацртати фреквентни спектар сигнала x из предходног задатка. На основу тога извршити избор периоде одабирања и нацртати фреквентни спектар сигнала $x(t)$ на улазу у идеални нископропусни пригушивач и фреквентни спектар његовог излазног сигнала?
Решење:
$x(t) = (5 \sin 2t)\, h(t) \Longrightarrow X(s) == \frac{10}{s^2+4} \Longrightarrow X(j\omega) = \frac{10}{4-\omega^2}$


$|X(j\omega)|$
3
2
1
-1
-2
-3
ω
-10
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
10
$\frac{\omega_0}{2}$

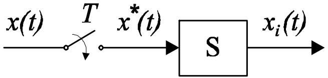
Први колоквијум из Рачунарског управљања



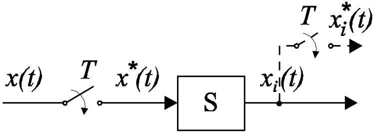


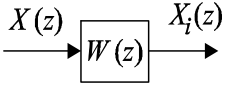
$|X_T(j\omega)|$
3
2
1
-1
-2
-3
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
ω
$\frac{\omega_0}{2}$

4. Посматра се систем приказан на слици. Одредити трећи облик комплексног лика дискретног излазног сигнала система С за случај да је $X(s) = \frac{1}{s}$ а преносна функција система С и периода одабирања $W(s) = 1$; $T = 0,1s$.

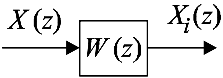


Решење:





Први колоквијум из Рачунарског управљања



$W(s) = 1 \Longrightarrow W(z) = \overline{\mathcal{Z}}\{X(s)\} \Longrightarrow$Таблица $z-$ трансформација, страна 181, случај први одозго, за $i = 0$

$W(s) = 1 \Longrightarrow W(z) = 1$

$X(s) = \frac{1}{s} \Longrightarrow X(z) = \overline{\mathcal{Z}}\{X(s)\} \Longrightarrow$Таблица $z-$ трансформација, страна 181, случај други одозго

$X(s) = \frac{1}{s} \Longrightarrow X(z) = \frac{z}{z-1}$

$X_i(z) = X(z)\, W(z) = \frac{z}{z-1} 1 = \frac{z}{z-1} \Longrightarrow$такође таблица $z-$ трансформација, страна 181, случај други одозго

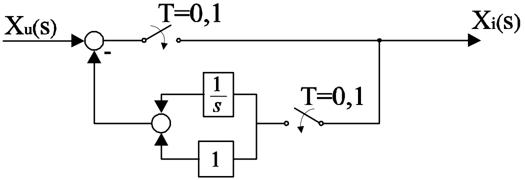
$\frac{z}{z-1} \Longrightarrow h(kT) = h(0,1k) = 1$

$$x_i^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h(0,1k)\, \delta(t - 0,1k) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - 0,1k) = \delta^*(t)$$

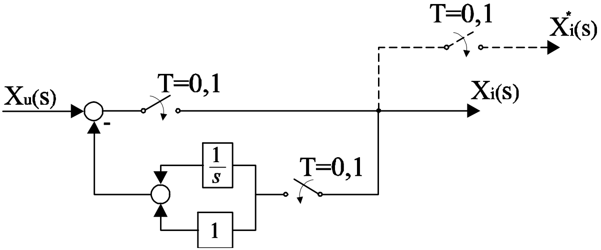
$$X_i^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} h(0,1k)\, e^{-0,1ks} = 1 + e^{-0,1s} + e^{-0,1s\cdot 2} + \cdots + e^{-0,1s\cdot k} + \Longrightarrow$$

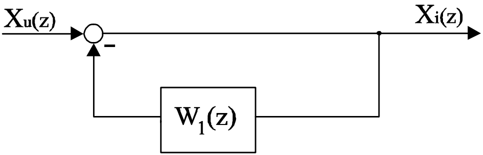
$q = e^{-0,1s} \Longrightarrow X_i^*(s) = \frac{1}{1-e^{-0,1s}}$

1. Одредити $z-$ блок дијаграм за систем са слике?



Решење:

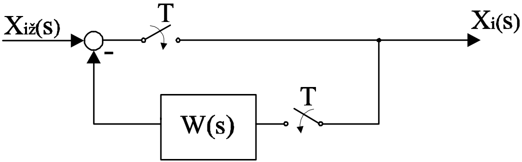




$$W_1(z) = \overline{\mathcal{Z}}\left\{1 + \frac{1}{s}\right\} = 1 + \frac{z}{z-1} = \frac{2z-1}{z-1}$$

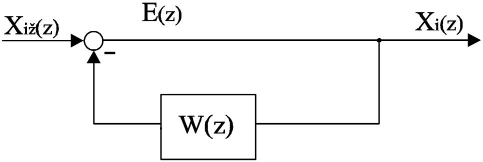
2. Одредити $z-$ преносну функцију система из првог задатка?
   Решење:
   $$W(z) = \frac{1}{1+W_1(z)} = \frac{1}{1+\frac{2z-1}{z-1}} = \frac{1}{\frac{z-1+2z-1}{z-1}} = \frac{z-1}{3z-2}$$

3. Одредити дискретну грешку САУ са слике:



при: $W(s) = \frac{1}{s}$, $T = 0,1\,\mathrm{sec}$, $X_{i\check{z}}(s) = \frac{1}{s}$

Решење:



$$W(z) = \overline{\mathcal{Z}}\left\{\frac{1}{s}\right\} = \frac{z}{z-1}; X_{i\check{z}}(z) = \overline{\mathcal{Z}}\left\{\frac{1}{s}\right\} = \frac{z}{z-1}$$

$\Longrightarrow E(z) = X_{i\check{z}}(z) - W(z)X_i(z) = X_{i\check{z}}(z) - W(z)E(z) \Longrightarrow$
$E(z) = \frac{1}{1+W(z)}X_{i\check{z}}(z) = \frac{1}{1+\frac{z}{z-1}}\frac{z}{z-1} = \frac{z-1}{2z-1}\frac{z}{z-1} = \frac{z}{2z-1} = \frac{0{,}5z}{z-0{,}5} \Longrightarrow$
$E(z) = 0,5\frac{z}{z-0{,}5} \Longrightarrow$
таблица $z-$ трансформација (уџбеник), страна 186, последњи случај
$\varepsilon(k) = 0,5(0,5)^{kT} = 0,5(0,5)^{0{,}1k}$

4. За систем из задатка 3. одредити дискретну једначину понашања?

   Решење:

   $X_i(z) = \frac{1}{1+W(z)}X_{i\check{z}}(z) = \frac{1}{1+\frac{z}{z-1}}X_{i\check{z}}(z) =$

   $\frac{z-1}{2z-1}X_{i\check{z}}(z) = \frac{0{,}5(z-1)}{z-0{,}5} \Longrightarrow$

   $(z-0,5)X_i(z) = (0,5z-0,5)X_{i\check{z}}(z) \Longrightarrow$

   $zX_i(z) - 0,5X_i(z) = 0,5zX_{i\check{z}}(z) - 0,5X_{i\check{z}}(z) \Longrightarrow$

$$x_i\left(k+1\right)-0,5x_i\left(k\right)=0,5x_{i\check{z}}\left(k+1\right)-0,5x_{i\check{z}}\left(k\right)$$

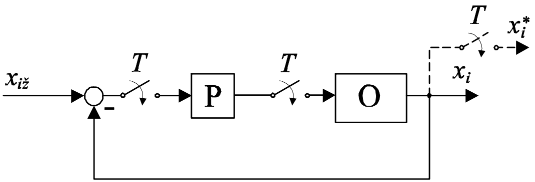
1. За систем аутоматског управљања према (1), (2):

$$\dot{x} = -x + y + 2z, x_i = x, y(k+1) = y(k) + \varepsilon(k) \qquad (1)$$

$$x_{i\check{z}}(t) = h(t), z(t) = 0 \qquad (2)$$

одредити z блок дијаграм и z преносну матрицу.

Решење:



Види се да је управљани објект континуалан, као што је иначе случај у највећем броју случајева, и задат својом диференцијалном једначином стања и једначином излаза.

Преносна функција објекта по y:

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-фебруар 2012.

$$sX(s) = -X(s) + Y(s) + 2Z(s) \Longrightarrow X(s) = \frac{1}{s+1}Y(s) + \frac{2}{s+1}Z(s) \Longrightarrow$$

$$X_i(s) = X(s) \Longrightarrow X_i(s) = \frac{1}{s+1}Y(s) + \frac{2}{s+1}Z(s) \Longrightarrow$$

$$W_{oy}(s) = \frac{1}{s+1}$$

Преносна функција објекта по z не долази до изражаја пошто је $z(t) = 0$.

z преносна функција објекта по y:

$$W_{oy}(z) = \overline{\mathcal{Z}}\{W_{oy}(s)\} = \overline{\mathcal{Z}}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = \frac{z}{z - e^{-T}}$$

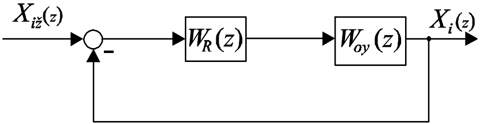
z преносна функција регулатора:

$$\mathcal{Z}\{y(k+1)\} = \mathcal{Z}\{y(k)\} + \mathcal{Z}\{\varepsilon(k)\} \Longrightarrow zY(z) = Y(z) + E(z) \Longrightarrow$$

$$Y(z) = \frac{1}{z-1}E(z) \Longrightarrow W_R(z) = \frac{1}{z-1}; X_{i\check{z}}(z) = \frac{z}{z-1}$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-фебруар 2012.

z блок дијаграм система:



z преносна матрица:

$$W(z) = \frac{W_R(z)\,W_{oy}(z)}{1 + W_R(z)\,W_{oy}(z)} = \frac{\frac{1}{z-1}\frac{z}{z-e^{-T}}}{1 + \frac{1}{z-1}\frac{z}{z-e^{-T}}} = \frac{z}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} \Longrightarrow$$

$$X_i(z) = W(z)\,X_{i\check{z}}(z) \Longrightarrow$$

$$\mathbf{W}(z) = W(z) = \frac{z}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}}$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-фебруар 2012.

2. Такође, за САУ према (1), (2) одредити његову једначину понашања.
   Решење:

$$X_i(z) = W(z)\, X_{i\check{z}}(z) = \frac{z}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} X_{i\check{z}}(z) \Longrightarrow$$

$$X_i(z)\left(z^2 - e^{-T}z + e^{-T}\right) = zX_{i\check{z}}(z) \Longrightarrow$$

$$z^2 X_i(z) - e^{-T}zX_i(z) + e^{-T}X_i(z) = zX_{i\check{z}}(z) \Longrightarrow$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{z^2 X_i(z) - e^{-T}zX_i(z) + e^{-T}X_i(z)\right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{zX_{i\check{z}}(z)\right\} \Longrightarrow$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{z^2 X_i(z)\right\} - \mathcal{Z}^{-1}\left\{e^{-T}zX_i(z)\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{e^{-T}X_i(z)\right\} =$$
$$= \mathcal{Z}^{-1}\left\{zX_{i\check{z}}(z)\right\} \Longrightarrow$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-фебруар 2012.

$$x_i(k+2) - e^{-T} x_i(k+1) + e^{-T} x_i(k) = x_{i\check{z}}(k+1)$$

3. Испитати стабилност и управљивост САУ задатог са (1), (2).
   Решење:
   Стабилност:

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}(z) &= W(z) = \frac{z}{z^2 - e^{-T} z + e^{-T}} \Longrightarrow \\
z_{1,2}^* &= \frac{e^{-T} \pm \sqrt{e^{-2T} - 4e^{-T}}}{2} \Longrightarrow \\
z_{1,2}^* &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4e^{T}}}{2e^{T}} \Longrightarrow \\
T &> 0 \Longrightarrow e^{T} > 1 \Longrightarrow 1 - 4e^{T} < 0 \Longrightarrow
\end{aligned}$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-фебруар 2012.

$$
\begin{aligned}
z_{1,2}^* &= \frac{1}{2e^T} \pm j\frac{\sqrt{4e^T-1}}{2e^T} \Longrightarrow \\
\left|z_{1,2}^*\right| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2e^T}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4e^T-1}}{2e^T}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{e^T}}
\end{aligned}
$$

Услов стабилности:

$$
\left|z_{1,2}^*\right| = \frac{1}{\sqrt{e^T}} < 1 \Longrightarrow e^T > 1
$$

Пошто је T по својој природи позитивно онда је e^T увек веће од 1 за било коју вредност T што повлачи да је систем стабилан за било коју вредност периоде одабирања T.

Управљивост:

На основу једначине понашања из задатка 2. одређује се једначина стања и излаза применом одговарајућег алгоритма за избор величина стања:

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-фебруар 2012.

$$x_i(k+2) - e^{-T}x_i(k+1) + e^{-T}x_i(k) = x_{i\check{z}}(k+1) \Longrightarrow$$

$$a_2 = 1, a_1 = -e^{-T}, a_0 = e^{-T}, b_0 = 0, b_1 = 1, b_2 = 0 \Longrightarrow$$

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-T} & 1 \\ -e^{-T} & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_2 \\ b_0 - a_0 b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T \Longrightarrow$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} e^{-T} & 1 \\ -e^{-T} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_{i\check{z}}(k)$$

$$x_i(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

Услов управљивости:

$$\det \begin{bmatrix} e^{-T} & 1 \\ -e^{-T} & 0 \end{bmatrix} = e^{-T} = \frac{1}{e^T} \neq 0 \Longrightarrow$$

матрица A система је регуларна $\Longrightarrow$

$$\text{rang}\begin{bmatrix} \mathbf{b} & A\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & e^{-T} \\ 0 & -e^{-T} \end{bmatrix} = 2; \left(\det \begin{bmatrix} 1 & e^{-T} \\ 0 & -e^{-T} \end{bmatrix} = -e^{-T} \neq 0\right)$$
$$\Longrightarrow$$

Систем је управљив!

4. За САУ према (1), (2) одредити кретање управљаног објекта при свим почетним условима једнаким нули.
   Решење:
   Једначина стања и једначина излаза регулатора:

$$y(k+1) = y(k) + \varepsilon(k) \Longrightarrow y(k+1) - y(k) = \varepsilon(k)$$
$$a_{1R} = 1; a_{0R} = -1; b_{0R} = 1; b_{1R} = 0 \Longrightarrow$$

$$A_R = -a_{0R} = 1; b_R = b_{0R} - a_{0R} b_{1R} = 1; c = 1$$
$$x_R(k+1) = x_R(k) + \varepsilon(k)$$
$$y(k) = x_R(k)$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-фебруар 2012.

Једначина стања и једначина излаза објекта:

$$W_{oy}(z) = \frac{X_i(z)}{Y(z)} = \frac{z}{z - e^{-T}} \Longrightarrow X_i(z)\left(z - e^{-T}\right) = zY(z) \Longrightarrow$$

$$zX_i(z) - e^{-T}X_i(z) = zY(z) \Longrightarrow x_i(k+1) - e^{-T}x_i(k) = y(k+1)$$

$$a_{1O} = 1; a_{0O} = -e^{-T}; b_{0O} = 0; b_{1O} = 1 \Longrightarrow$$

$$A_O = -a_{0O} = e^{-T}; b_O = b_{0O} - a_{0O}b_{1O} = e^{-T}; c_O = 1; d_O = 1$$

$$x_O(k+1) = e^{-T}x_O(k) + e^{-T}y(k)$$

$$x_i(k) = x_O(k) + y(k)$$

Једначина стања и једначина излаза целог система:

$$\begin{aligned} x_O(k+1) &= e^{-T}x_O(k) + e^{-T}y(k) \\ x_R(k+1) &= x_R(k) + \varepsilon(k) \end{aligned}$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-фебруар 2012.

$$\begin{aligned} x_i(k) &= x_O(k) + y(k) \\ y(k) &= x_R(k) \\ &\Longrightarrow \end{aligned}$$

$$x_O(k+1) = e^{-T} x_O(k) + e^{-T} x_R(k);$$

$$x_R(k+1) = x_R(k) + x_{i\check{z}}(k) - x_i(k) = -x_O(k) + x_{i\check{z}}(k)$$

$$x_i(k) = x_O(k) + y(k) = x_O(k) + x_R(k) \Longrightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_O \\ x_R \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} e^{-T} & e^{-T} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_{i\check{z}}(k) \\ x_i(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-фебруар 2012.

Кретање:

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}x_{i\check{z}}(k) \Longrightarrow$$

$$\mathcal{Z}\{\mathbf{x}(k+1)\} = \mathcal{Z}\{A\mathbf{x}(k)\} + \mathcal{Z}\{\mathbf{b}x_{i\check{z}}(k)\} \Longrightarrow$$

$$zX(z) = AX(z) + \mathbf{b}X_{i\check{z}}(z) \Longrightarrow X(z) = (zI - A)^{-1}\mathbf{b}X_{i\check{z}}(z) \Longrightarrow$$

$$(zI - A) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e^{-T} & e^{-T} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z - e^{-T} & -e^{-T} \\ 1 & z \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\det(zI - A) = z^2 - e^{-T}z + e^{-T}; \mathrm{adj}(zI - A) = \begin{bmatrix} z & e^{-T} \\ -1 & z - e^{-T} \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$(zI - A)^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(zI - A)}{\det(zI - A)} = \begin{bmatrix} \frac{z}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} & \frac{e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} \\ \frac{-1}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} & \frac{z - e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$(zI - A)^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{z}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} & \frac{e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} \\ \frac{-1}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} & \frac{z - e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} \\ \frac{z - e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} \end{bmatrix};$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-фебруар 2012.

$$X_{i\check{z}}(z) = \frac{z}{z-1} \Longrightarrow (zI - A)^{-1}\mathbf{b}X_{i\check{z}}(z) = \begin{bmatrix} \frac{e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}}\frac{z}{z-1} \\ \frac{z - e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}}\frac{z}{z-1} \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$X(z) = \begin{bmatrix} \frac{e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}}\frac{z}{z-1} \\ \frac{z - e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}}\frac{z}{z-1} \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_O \\ \chi_R \end{bmatrix} = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} \frac{e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}}\frac{z}{z-1} \\ \frac{z - e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}}\frac{z}{z-1} \end{bmatrix} \right\}$$

Пошто се тражи само кретање управљаног објекта, то значи да треба одредити само χ_O :$\Longrightarrow$

$$\chi_O = \mathcal{Z}^{-1}\left\{ \frac{e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}}\frac{z}{z-1} \right\}$$

Функција $X_O(z)$ се развија у Хефисајдов развој:

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-фебруар 2012.

$$X_O(z) = \frac{e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} \frac{z}{z-1} \Longrightarrow$$

$$\widehat{X}_O(z) = \frac{e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} \frac{1}{z-1}$$

Сви полови су једноструки:

$$z_1^* = 1; z_{2,3}^* = \frac{1}{2e^T} \pm j\frac{\sqrt{4e^T - 1}}{2e^T}$$

$$R_i = \left.\frac{e^{-T}}{\left[\left(z^2 - e^{-T}z + e^{-T}\right)(z-1)\right]'}\right|_{z_i^*} =$$

$$= \left.\frac{e^{-T}}{(z-1)\left(2z - e^{-T}\right) + \left(z^2 - e^{-T}z + e^{-T}\right)}\right|_{z_i^*}$$

$$R_1 = \left.\frac{e^{-T}}{(z-1)\left(2z - e^{-T}\right) + \left(z^2 - e^{-T}z + e^{-T}\right)}\right|_{z_1^*=1} = e^{-T}$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-фебруар 2012.

$$R_2=\left.\frac{e^{-T}}{(z-1)\left(2z-e^{-T}\right)+\left(z^2-e^{-T}z+e^{-T}\right)}\right|_{z_2^*=\frac{1}{2e^T}+j\frac{\sqrt{4e^T-1}}{2e^T}}=$$

$$=\left.\frac{e^{-T}}{z^2-2z}\right|_{z_2^*=\frac{1}{2e^T}+j\frac{\sqrt{4e^T-1}}{2e^T}}$$

$$R_3=\left.\frac{e^{-T}}{(z-1)\left(2z-e^{-T}\right)+\left(z^2-e^{-T}z+e^{-T}\right)}\right|_{z_3^*=\frac{1}{2e^T}-j\frac{\sqrt{4e^T-1}}{2e^T}}=$$

$$=\left.\frac{e^{-T}}{z^2-2z}\right|_{z_3^*=\frac{1}{2e^T}-j\frac{\sqrt{4e^T-1}}{2e^T}}$$

$$\widehat{X}_O(z)=\frac{R_1}{z-1}+\frac{R_2}{z-z_2^*}+\frac{R_3}{z-z_3^*}\Longrightarrow$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-фебруар 2012.

$$
\begin{aligned}
X_O(z) &= R_1 \frac{z}{z-1} + R_2 \frac{z}{z-z_2^*} + R_3 \frac{z}{z-z_3^*} \\
\chi_O &= R_1 h(k) + R_2 \left(z_2^*\right)^{kT} + R_3 \left(z_3^*\right)^{kT}
\end{aligned}
$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

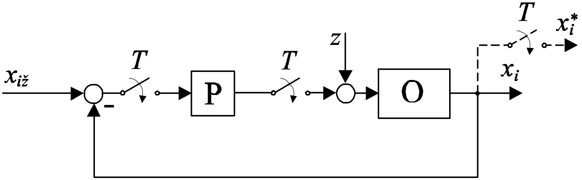
1. За систем аутоматског управљања према (3), (4):

$$\dot{x} = -x + y + 2z, x_i = x, y\left(k+1\right) = y\left(k\right) + \varepsilon\left(k\right) \tag{3}$$

$$x_{i\check{z}}\left(t\right) = h\left(t\right), z\left(t\right) = 0 \tag{4}$$

одредити z блок дијаграм и z преносну матрицу.

Решење:



Види се да је управљани објект континуалан, као што је иначе случај у највећем броју случајева, и задат својом диференцијалном једначином стања и једначином излаза. Преносна функција објекта по y:

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

$$sX(s) = -X(s) + Y(s) + 2Z(s) \Longrightarrow X(s) = \frac{1}{s+1}Y(s) + \frac{2}{s+1}Z(s) \Longrightarrow$$

$$X_i(s) = X(s) \Longrightarrow X_i(s) = \frac{1}{s+1}Y(s) + \frac{2}{s+1}Z(s) \Longrightarrow$$

$$W_{oy}(s) = \frac{1}{s+1}; W_{oz}(s) = \frac{2}{s+1}$$

z преносна функција објекта по y:

$$W_{oy}(z) = \overline{\mathcal{Z}}\{W_{oy}(s)\} = \overline{\mathcal{Z}}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = \frac{z}{z-e^{-T}}$$

z преносна функција објекта по z не постоји, али постоји фиктивни поремећај $\hat{z}$ чији је z лик:

$$\begin{aligned}\widehat{Z}(z) &= \overline{\mathcal{Z}}\{W_{oz}(s)Z(s)\} = \overline{\mathcal{Z}}\left\{\frac{2}{(s+1)s}\right\} = \overline{\mathcal{Z}}\left\{\frac{2}{s} - \frac{2}{s+1}\right\} = \\ &= \frac{2z}{z-1} - \frac{2z}{z-e^{-T}} = \frac{2\left(1-e^{-T}\right)z}{(z-1)\left(z-e^{-T}\right)}\end{aligned}$$

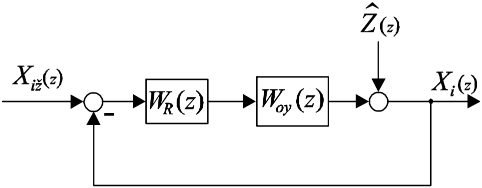
Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

z преносна функција регулатора:

$$\mathcal{Z}\{y(k+1)\} = \mathcal{Z}\{y(k)\} + \mathcal{Z}\{\varepsilon(k)\} \Longrightarrow zY(z) = Y(z) + E(z) \Longrightarrow$$

$$Y(z) = \frac{1}{z-1}E(z) \Longrightarrow W_R(z) = \frac{1}{z-1}; X_{i\check{z}}(z) = \frac{z}{z-1}$$

z блок дијаграм система:



Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

z преносна матрица:

$$X_i(z) = \widehat{Z}(z) + W_R(z)\,W_{oy}(z)\left[X_{i\check{z}}(z) - X_i(z)\right] \Longrightarrow$$

$$X_i(z) = \frac{W_R(z)\,W_{oy}(z)}{1 + W_R(z)\,W_{oy}(z)} X_{i\check{z}}(z) + \frac{1}{1 + W_R(z)\,W_{oy}(z)} \widehat{Z}(z)$$

$$X_i(z) = \left[\begin{array}{cc} W_{x_{i\check{z}}}(z) & W_{\widehat{z}}(z) \end{array}\right] \mathbf{X}_u(z);\, \mathbf{X}_u(z) = \left[\begin{array}{cc} X_{i\check{z}}(z) & \widehat{Z}(z) \end{array}\right]^T$$

$$W_{x_{i\check{z}}}(z) = \frac{W_R(z)\,W_{oy}(z)}{1 + W_R(z)\,W_{oy}(z)} = \frac{\frac{1}{z-1}\frac{z}{z-e^{-T}}}{1 + \frac{1}{z-1}\frac{z}{z-e^{-T}}} = \frac{z}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}}$$

$$W_{\widehat{z}}(z) = \frac{1}{1 + W_R(z)\,W_{oy}(z)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{z-1}\frac{z}{z-e^{-T}}} = \frac{z^2 - \left(1 + e^{-T}\right)z + e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}}$$

$$X_i(z) = \mathbf{W}(z)\,\mathbf{X}_u(z) \Longrightarrow$$

$$\mathbf{W}(z) = \left[\begin{array}{cc} W_{x_{i\check{z}}}(z) & W_{\widehat{z}}(z) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \frac{z}{z^2-e^{-T}z+e^{-T}} & \frac{z^2-\left(1+e^{-T}\right)z+e^{-T}}{z^2-e^{-T}z+e^{-T}} \end{array}\right]$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

2. Такође, за САУ према (3), (4) одредити његову векторску једначину понашања.
   Решење:

$$X_i(z) = \mathbf{W}(z)\,\mathbf{X}_u(z) = \begin{bmatrix} \frac{z}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} & \frac{z^2 - \left(1 + e^{-T}\right)z + e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} X_{i\check{z}}(z) \\ \widehat{Z}(z) \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$X_i(z)\left(z^2 - e^{-T}z + e^{-T}\right) = zX_{i\check{z}}(z) +$$

$$+ \left[z^2 - \left(1 + e^{-T}\right)z + e^{-T}\right]\widehat{Z}(z) \Longrightarrow$$

$$z^2 X_i(z) - e^{-T}zX_i(z) + e^{-T}X_i(z) = zX_{i\check{z}}(z) + z^2\widehat{Z}(z) -$$

$$-\left(1 + e^{-T}\right)z\widehat{Z}(z) + e^{-T}\widehat{Z}(z) \Longrightarrow$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

$$z^2 X_i(z) - e^{-T} z X_i(z) + e^{-T} X_i(z) = \begin{bmatrix} 0 & e^{-T} \end{bmatrix} \mathbf{X}_u(z) +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & -\left(1+e^{-T}\right) \end{bmatrix} z\mathbf{X}_u(z) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} z^2 \mathbf{X}_u(z)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{ z^2 X_i(z) - e^{-T} z X_i(z) + e^{-T} X_i(z) \right\} =$$

$$= \mathcal{Z}^{-1}\left\{ \mathbf{B}_0 \mathbf{X}_u(z) + \mathbf{B}_1 z \mathbf{X}_u(z) + \mathbf{B}_2 z^2 \mathbf{X}_u(z) \right\} \Longrightarrow$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{ z^2 X_i(z) \right\} - \mathcal{Z}^{-1}\left\{ e^{-T} z X_i(z) \right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{ e^{-T} X_i(z) \right\} =$$

$$= \mathcal{Z}^{-1}\left\{ \mathbf{B}_0 \mathbf{X}_u(z) \right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{ \mathbf{B}_1 z \mathbf{X}_u(z) \right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{ \mathbf{B}_2 z^2 \mathbf{X}_u(z) \right\} \Longrightarrow$$

$$x_i(k+2) - e^{-T} x_i(k+1) + e^{-T} x_i(k) =$$

$$= \mathbf{B}_0 \mathbf{x}_u(k) + \mathbf{B}_1 \mathbf{x}_u(k+1) + \mathbf{B}_2 \mathbf{x}_u(k+2)$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

3. Испитати стабилност и управљивост САУ задатог са (3), (4).
   Решење:
   Стабилност:

$$\mathbf{W}(z) = \begin{bmatrix} \frac{z}{z^2-e^{-T}z+e^{-T}} & \frac{z^2-\left(1+e^{-T}\right)z+e^{-T}}{z^2-e^{-T}z+e^{-T}} \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$z^*_{1,2} = \frac{e^{-T} \pm \sqrt{e^{-2T} - 4e^{-T}}}{2} \Longrightarrow$$

$$z^*_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4e^{T}}}{2e^{T}} \Longrightarrow$$

$$T > 0 \Longrightarrow e^{T} > 1 \Longrightarrow 1 - 4e^{T} < 0 \Longrightarrow$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

$$
\begin{aligned}
z_{1,2}^* &= \frac{1}{2e^T} \pm j\frac{\sqrt{4e^T - 1}}{2e^T} \Longrightarrow \\
\left|z_{1,2}^*\right| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2e^T}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4e^T - 1}}{2e^T}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{e^T}}
\end{aligned}
$$

Услов стабилности:

$$
\left|z_{1,2}^*\right| = \frac{1}{\sqrt{e^T}} < 1 \Longrightarrow e^T > 1
$$

Пошто је T по својој природи позитивно онда је e^T увек веће од 1 за било коју вредност T што повлачи да је систем стабилан за било коју вредност периоде одабирања T.
Управљивост:
На основу једначине понашања из задатка 2. одређује се једначина стања и излаза применом одговарајућег алгоритма за избор величина стања:

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

$$x_i(k+2) - e^{-T}x_i(k+1) + e^{-T}x_i(k) =$$

$$= \mathbf{B}_0\mathbf{x}_u(k) + \mathbf{B}_1\mathbf{x}_u(k+1) + \mathbf{B}_2\mathbf{x}_u(k+2) \Longrightarrow$$

$$a_2 = 1, a_1 = -e^{-T}, a_0 = e^{-T},$$

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 0 & e^{-T} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\left(1+e^{-T}\right) \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-T} & 1 \\ -e^{-T} & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 - a_1\mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_0 - a_0\mathbf{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{c} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T \Longrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} e^{-T} & 1 \\ -e^{-T} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_u(k) \\ x_i(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

Услов управљивости:

$$\det\begin{bmatrix} e^{-T} & 1 \\ -e^{-T} & 0 \end{bmatrix} = e^{-T} = \frac{1}{e^{T}} \neq 0 \Longrightarrow$$

матрица A система је регуларна $\Longrightarrow$

$$\text{rang}\begin{bmatrix} \mathbf{B} & A\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & e^{-T} & -e^{-T} \\ 0 & 0 & -e^{-T} & e^{-T} \end{bmatrix} = 2; \left(\det\begin{bmatrix} -1 & e^{-T} \\ 0 & -e^{-T} \end{bmatrix} = \right.$$

$$\left. = e^{-T} \neq 0\right) \Longrightarrow$$

Систем је управљив!

4. За САУ према (3), (4) одредити кретање регулатора који управља објект при свим почетним условима једнаким нули.

   Решење:

   Једначина стања и једначина излаза регулатора:

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

$$y(k+1) = y(k) + \varepsilon(k) \Longrightarrow y(k+1) - y(k) = \varepsilon(k)$$

$$a_{1R} = 1; a_{0R} = -1; b_{0R} = 1; b_{1R} = 0 \Longrightarrow$$

$$A_R = -a_{0R} = 1; b_R = b_{0R} - a_{0R} b_{1R} = 1; c = 1$$

$$x_R(k+1) = x_R(k) + \varepsilon(k)$$

$$y(k) = x_R(k)$$

Једначина стања и једначина излаза објекта:

$$X_i(z) = W_{oy}(z) Y(z) + \widehat{Z}(z) = \frac{z}{z - e^{-T}} Y(z) + \widehat{Z}(z) \Longrightarrow$$

$$X_i(z)\left(z - e^{-T}\right) = zY(z) + \widehat{Z}(z)\left(z - e^{-T}\right) \Longrightarrow$$

$$zX_i(z) - e^{-T} X_i(z) = zY(z) + z\widehat{Z}(z) - e^{-T}\widehat{Z}(z) \Longrightarrow$$

$$x_i(k+1) - e^{-T} x_i(k) = \begin{bmatrix} 0 & -e^{-T} \end{bmatrix} \mathbf{x}_{uo}(k) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{uo}(k+1);$$

$$\mathbf{x}_{uo} = \begin{bmatrix} y & \widehat{z} \end{bmatrix}^T$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

$$a_{1O} = 1; a_{0O} = -e^{-T}; \mathbf{B}_{0O} = \begin{bmatrix} 0 & -e^{-T} \end{bmatrix}; \mathbf{B}_{1O} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$A_O = -a_{0O} = e^{-T}; \mathbf{B}_O = \mathbf{B}_{0O} - a_{0O}\mathbf{B}_{1O} = \begin{bmatrix} 0 & -e^{-T} \end{bmatrix} + e^{-T}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \end{bmatrix}; c_O = 1; \mathbf{d}_O = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_O(k+1) = e^{-T}x_O(k) + \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}_{uo}(k)$$

$$x_i(k) = x_O(k) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}_{uo}(k)$$

Једначина стања и једначина излаза целог система:

$$\begin{aligned} x_O(k+1) &= e^{-T}x_O(k) + \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}_{uo}(k) \\ x_R(k+1) &= x_R(k) + \varepsilon(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_i(k) &= x_O(k) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}_{uo}(k) \\ y(k) &= x_R(k) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

$$x_O(k+1) = e^{-T} x_O(k) + e^{-T} x_R(k);$$

$$x_R(k+1) = x_R(k) + x_{i\check{z}}(k) - x_i(k) = -x_O(k) + x_{i\check{z}}(k) - \widehat{z}(k)$$

$$x_i(k) = x_O(k) + y(k) + \widehat{z}(k) = x_O(k) + x_R(k) + \widehat{z}(k) \Longrightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_O \\ x_R \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} e^{-T} & e^{-T} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_u(k)$$

$$x_i(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_u(k)$$

Кретање:

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{x}_u(k) \Longrightarrow$$

$$\mathcal{Z}\{\mathbf{x}(k+1)\} = \mathcal{Z}\{A\mathbf{x}(k)\} + \mathcal{Z}\{B\mathbf{x}_u(k)\} \Longrightarrow$$

$$zX(z) = AX(z) + B\mathbf{X}_u(z) \Longrightarrow X(z) = (zI - A)^{-1} B\mathbf{X}_u(z) \Longrightarrow$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

$$(zI - A) = \left[\begin{array}{cc} z & 0 \\ 0 & z \end{array}\right] - \left[\begin{array}{cc} e^{-T} & e^{-T} \\ -1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} z - e^{-T} & -e^{-T} \\ 1 & z \end{array}\right] \Longrightarrow$$

$$\det(zI - A) = z^2 - e^{-T}z + e^{-T}; \mathrm{adj}\,(zI - A) = \left[\begin{array}{cc} z & e^{-T} \\ -1 & z - e^{-T} \end{array}\right] \Longrightarrow$$

$$(zI - A)^{-1} = \frac{\mathrm{adj}\,(zI - A)}{\det(zI - A)} = \left[\begin{array}{cc} \frac{z}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} & \frac{e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} \\ \frac{-1}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} & \frac{z - e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} \end{array}\right] \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} (zI - A)^{-1} B &= \left[\begin{array}{cc} \frac{z}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} & \frac{e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} \\ \frac{-1}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} & \frac{z - e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{array}\right] = \\ &= \left[\begin{array}{cc} \frac{e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} & \frac{-e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} \\ \frac{z - e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} & \frac{-z + e^{-T}}{z^2 - e^{-T}z + e^{-T}} \end{array}\right]; \end{aligned}$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

$$\mathbf{X}_u(z) = \begin{bmatrix} \frac{z}{z-1} \\ \frac{2\left(1-e^{-T}\right)z}{(z-1)\left(z-e^{-T}\right)} \end{bmatrix} \Longrightarrow (zI - A)^{-1} B\mathbf{X}_u(z) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{e^{-T}}{z^2-e^{-T}z+e^{-T}} \frac{z}{z-1} \frac{z-2+e^{-T}}{z-e^{-T}} \\ \frac{z-e^{-T}}{z^2-e^{-T}z+e^{-T}} \frac{z}{z-1} \frac{z-2+e^{-T}}{z-e^{-T}} \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$X(z) = \begin{bmatrix} \frac{e^{-T}}{z^2-e^{-T}z+e^{-T}} \frac{z}{z-1} \frac{z-2+e^{-T}}{z-e^{-T}} \\ \frac{z-e^{-T}}{z^2-e^{-T}z+e^{-T}} \frac{z}{z-1} \frac{z-2+e^{-T}}{z-e^{-T}} \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_O \\ \chi_R \end{bmatrix} = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{e^{-T}}{z^2-e^{-T}z+e^{-T}} \frac{z}{z-1} \frac{z-2+e^{-T}}{z-e^{-T}} \\ \frac{z-e^{-T}}{z^2-e^{-T}z+e^{-T}} \frac{z}{z-1} \frac{z-2+e^{-T}}{z-e^{-T}} \end{bmatrix}\right\}$$

Пошто се тражи само кретање регулатора који управља објект, то значи да треба одредити само χ_R :$\Longrightarrow$

$$\chi_R = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z-e^{-T}}{z^2-e^{-T}z+e^{-T}} \frac{z}{z-1} \frac{z-2+e^{-T}}{z-e^{-T}}\right\}$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

Функција $X_R(z)$ се развија у Хефисајдов развој:

$$X_R(z) = \frac{z-e^{-T}}{z^2-e^{-T}z+e^{-T}}\frac{z}{z-1}\frac{z-2+e^{-T}}{z-e^{-T}} \Longrightarrow$$
$$\widehat{X}_R(z) = \frac{z-e^{-T}}{z^2-e^{-T}z+e^{-T}}\frac{1}{z-1}\frac{z-2+e^{-T}}{z-e^{-T}}$$

Сви полови су једноструки:

$$z_1^* = 1; z_{2,3}^* = \frac{1}{2e^T} \pm j\frac{\sqrt{4e^T-1}}{2e^T}; z_4^* = e^{-T}$$

$$R_i = \left.\frac{\left(z-e^{-T}\right)\left(z-2+e^{-T}\right)}{\left[\left(z^2-e^{-T}z+e^{-T}\right)(z-1)\left(z-e^{-T}\right)\right]'}\right|_{z_i^*} =$$

$$R_1 = \left.\frac{\left(z-e^{-T}\right)\left(z-2+e^{-T}\right)}{\left(z^2-e^{-T}z+e^{-T}\right)\left(z-e^{-T}\right)}\right|_{z_1^*=1} = e^{-T}-1$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

$$R_2 = \left.\frac{\left(z-e^{-T}\right)\left(z-2+e^{-T}\right)}{(z-1)\left(2z-e^{-T}\right)\left(z-e^{-T}\right)}\right|_{z_2^*=\frac{1}{2e^T}+j\frac{\sqrt{4e^T-1}}{2e^T}} =$$

$$= \left.\frac{\left(z-2+e^{-T}\right)}{2z^2-\left(2+e^{-T}\right)z+e^{-T}}\right|_{z_2^*=\frac{1}{2e^T}+j\frac{\sqrt{4e^T-1}}{2e^T}}$$

$$R_3 = \left.\frac{\left(z-e^{-T}\right)\left(z-2+e^{-T}\right)}{(z-1)\left(2z-e^{-T}\right)\left(z-e^{-T}\right)}\right|_{z_3^*=\frac{1}{2e^T}-j\frac{\sqrt{4e^T-1}}{2e^T}} =$$

$$= \left.\frac{\left(z-2+e^{-T}\right)}{2z^2-\left(2+e^{-T}\right)z+e^{-T}}\right|_{z_3^*=\frac{1}{2e^T}-j\frac{\sqrt{4e^T-1}}{2e^T}}$$

$$R_4 = 0$$

Завршни писмени испит из Рачунарског управљања-мај 2012.

$$\widehat{X}_R(z) = \frac{R_1}{z-1} + \frac{R_2}{z-z_2^*} + \frac{R_3}{z-z_3^*} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} X_R(z) &= R_1\frac{z}{z-1} + R_2\frac{z}{z-z_2^*} + R_3\frac{z}{z-z_3^*} \\ \chi_R &= R_1 h(k) + R_2\left(z_2^*\right)^{kT} + R_3\left(z_3^*\right)^{kT} \end{aligned}$$