

Аудиторне вежбе из дигиталних система

Минимизовање логичких функција

Зоран М. Бучевац

Машински факултет у Бгд.

октобар 2011.

Аудиторне вежбе из Дигиталних система

Минимизовање логичких функција

1. Минимизовати следеће логичке функције у стандардне облике збира производа: а) $F(x, y, z) = \sum(2, 3, 6, 7)$ б) $F(A, B, C, D) = \sum(7, 13, 14, 15)$ в) $F(A, B, C, D) = \sum(4, 6, 7, 15)$ г) $F(w, x, y, z) = \sum(2, 3, 12, 13, 14, 15)$?

Решење:

а)

		<i>yz</i>			
<i>x</i>		00	01	11	10
	0	0	0	1	1
	1	0	0	1	1

$$F(x, y, z) = y$$

б)

		<i>CD</i>			
<i>AB</i>		00	01	11	10
	00	0	0	0	0
	01	0	0	1	0
	11	0	1	1	1
	10	0	0	0	0

$$F(A, B, C, D) = BCD + ABD + ABC$$

Аудиторне вежбе из Дигиталних система

Минимизовање логичких функција

в)

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0	0	0	0
	01	1	0	1	1
	11	0	0	1	0
	10	0	0	0	0

$$F(A,B,C,D) = BCD + \overline{A}B\overline{D}$$

г)

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	0	1	1
	01	0	0	0	0
	11	1	1	1	1
	10	0	0	0	0

$$F(w,x,y,z) = wx + \overline{w}x\overline{y}$$

2. Минимизовати следеће логичке функције у стандардни облик збир производа: а) $xy + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}y\overline{z}$ б) $\overline{A}B + B\overline{C} + \overline{B}C$ в) $\overline{a}\overline{b} + bc + \overline{a}b\overline{c}$ г) $x\overline{y}z + xy\overline{z} + \overline{x}yz + xyz$?

Аудиторне вежбе из Дигиталних система

Минимизовање логичких функција

Решење:

а)

	<i>yz</i>	00	01	11	10
<i>x</i>	0	1	0	0	1
	1	0	0	1	1

$$f(x,y,z)=xy+\bar{x}\bar{z}$$

б)

	<i>BC</i>	00	01	11	10
<i>A</i>	0	1	0	1	1
	1	1	0	0	1

$$f(A,B,C)=\bar{C}+\bar{A}B$$

в)

	<i>bc</i>	00	01	11	10
<i>a</i>	0	1	1	1	1
	1	0	0	1	0

$$f(a,b,c)=\bar{a}+bc$$

г)

	<i>yz</i>	00	01	11	10
<i>x</i>	0	0	0	1	0
	1	0	1	1	1

$$f(x,y,z)=yz+xy+xz$$

Аудиторне вежбе из Дигиталних система

Минимизовање логичких функција

3. Минимизовати следеће логичке функције у суму производа: а) $D(\bar{A} + B) + \bar{B}(C + AD)$ б) $ABD + \bar{A}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B + \bar{A}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{D}$ в) $k\bar{l}m + \bar{k}\bar{m}n + k\bar{l}m\bar{n} + lm\bar{n}$ г) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}C\bar{D} + \bar{B}C\bar{D} + \bar{A}BCD + B\bar{C}D$ д) $\bar{x}z + \bar{w}x\bar{y} + w(\bar{x}y + x\bar{y})$?

Решење:

а)

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0	1	1	1
	01	0	1	1	0
	11	0	1	1	0
	10	0	1	1	1

$$f(A,B,C,D) = D + \bar{B}C$$

б)

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	0	0	1
	01	1	1	1	1
	11	0	1	1	0
	10	1	0	0	1

$$f(A,B,C,D) = BD + \bar{A}\bar{D} + \bar{B}\bar{D}$$

Аудиторне вежбе из Дигиталних система

Минимизовање логичких функција

в)

<i>kl</i>	<i>mn</i>	00	01	11	10
00	0	1	0	0	
01	1	1	0	1	
11	1	0	0	1	
10	0	0	0	0	

$$f(k,l,m,n) = \bar{l}\bar{n} + \bar{k}m\bar{n}$$

г)

<i>AB</i>	<i>CD</i>	00	01	11	10
00	1	0	0	1	
01	0	1	1	0	
11	1	1	0	0	
10	1	0	0	1	

$$f(A,B,C,D) = \bar{B}\bar{D} + \bar{A}BD + ABC$$

д)

<i>wx</i>	<i>yz</i>	00	01	11	10
00	0	1	1	0	
01	1	1	0	0	
11	1	1	0	0	
10	0	1	1	1	

$$f(w,x,y,z) = \bar{x}\bar{y} + \bar{x}z + w\bar{x}y$$

Аудиторне вежбе из Дигиталних система

Минимизовање логичких функција

4. Минимизовати следеће логичке функције у суму производа: а) $F(A, B, C, D, E) = \sum(0, 1, 4, 5, 16, 17, 21, 25, 29)$
 б) $BDE + \overline{B} \overline{C} D + CDE + \overline{A} \overline{B} C E + \overline{A} \overline{B} C + \overline{B} \overline{C} \overline{D} \overline{E}$
 в) $\overline{A} \overline{B} C \overline{E} + \overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D} + \overline{B} \overline{D} \overline{E} + \overline{B} C \overline{D} + C D \overline{E} + B D \overline{E}$?

Решење:

а)

		CDE							
		000	001	011	010	110	111	101	100
AB	00	1	1					1	1
	01								
	11		1					1	
	10	1	1					1	

$$f(A, B, C, D, E) = \overline{A} \overline{D} \overline{E} + \overline{A} \overline{B} \overline{D} + \overline{B} C \overline{D}$$

Аудиторне вежбе из Дигиталних система

Минимизовање логичких функција

б)

		<i>CDE</i>							
		<i>AB</i>	000	001	011	010	110	111	101
00	00	1		1	1	1	1	1	1
	01			1			1		
	11			1			1		
	10	1		1	1		1		

$$f(A,B,C,D,E) = DE + \overline{A}\overline{B}C + \overline{B}\overline{C}E$$

Аудиторне вежбе из Дигиталних система

Минимизовање логичких функција

в)

		<i>CDE</i>							
		<i>AB</i>	000	001	011	010	110	111	101
00	00	1	1			1		1	1
	01				1	1			
	11				1	1			
	10	1				1		1	1

$$f(A,B,C,D,E) = B\bar{D}\bar{E} + C\bar{D}\bar{E} + \bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}D + B\bar{D}\bar{E}$$

Аудиторне вежбе из Дигиталних система


Минимизовање логичких функција

5. Дата је следећа табела вредности:

x	y	z	F_1	F_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

- Изразити F_1 и F_2 као производ макстермова
- Одредити упрошћене функције у облику суме производа
- Одредити упрошћене функције у облику производа сума?

Решење:

а) $F_1(x, y, z) = (x + y + z)(x + \bar{y} + \bar{z})(\bar{x} + y + \bar{z})(\bar{x} + \bar{y} + z)$; 

Аудиторне вежбе из Дигиталних система

Минимизовање логичких функција

$$F_2(x, y, z) = (x + y + z)(x + y + \bar{z})(x + \bar{y} + z)(\bar{x} + y + z)$$

б)

		yz			
x		00	01	11	10
0			1		1
1		1		1	

$$F_1(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + xyz$$

		yz			
x		00	01	11	10
0				1	
1			1	1	1

$$F_2(x, y, z) = yz + xy + xz$$

в)

		yz			
x		00	01	11	10
0		0		0	
1			0		0

$$\bar{F}_1(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z}$$

$$F_1(x, y, z) = (x + y + z)(x + \bar{y} + \bar{z})(\bar{x} + y + \bar{z})(\bar{x} + y + z)$$

		yz			
x		00	01	11	10
0		0	0		0
1		0			

$$\bar{F}_2(x, y, z) = \bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{z}$$

$$F_2(x, y, z) = (y + z)(x + y)(x + z)$$

Аудиторне вежбе из Дигиталних система

Минимизовање логичких функција

6. Одреди упрошћене изразе у виду производа сума:

а) $F(x, y, z) = \prod(0, 1, 4, 5)$

б) $F(A, B, C, D) = \prod(0, 1, 2, 3, 4, 10, 11)$

в) $F(w, x, y, z) = \prod(1, 3, 5, 7, 13, 15)?$

Решење:

б)

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0	0	0	0
	01	0			
	11				
	10			0	0

$$\bar{F}(A, B, C, D) = \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{C}\bar{D}$$

$$F(A, B, C, D) = (A+B)(B+\bar{C})(A+C+D)$$

Аудиторне вежбе из Дигиталних система

Минимизовање логичких функција

7. Одредити упрошћене изразе у виду а) суме производа и б) производа сума:

а) $\bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{z} + y\bar{z} + xyz$

б) $(A + \bar{B} + D)(\bar{A} + B + D)(C + D)(\bar{C} + \bar{D})$

в) $(\bar{A} + \bar{B} + \bar{D})(A + \bar{B} + \bar{C})(\bar{A} + B + \bar{D})(B + \bar{C} + \bar{D})$

г) $(\bar{A} + \bar{B} + D)(\bar{A} + \bar{D})(A + B + \bar{D})(A + \bar{B} + C + D)$

д) $\bar{w}y\bar{z} + v\bar{w}\bar{z} + v\bar{w}x + \bar{v}wz + \bar{v}wyz$

Решење:

а)

		yz			
	x	00	01	11	10
0		1	0	0	1
1		1	0	1	1

$$\bar{z} + xy = (\bar{x}\bar{z} + y\bar{z}) = (x + \bar{z})(y + \bar{z})$$

Аудиторне вежбе из Дигиталних система

Минимизовање логичких функција

$$\begin{aligned}
 6) \quad & (A + \bar{B} + D) (\bar{A} + B + D) (C + D) (\bar{C} + \bar{D}) = (A + \bar{B} + C\bar{C} + D) \cdot \\
 & (\bar{A} + B + C\bar{C} + D) (A\bar{A} + B\bar{B} + C + D) (A\bar{A} + B\bar{B} + \bar{C} + \bar{D}) = \\
 & (A + \bar{B} + C + D) (A + \bar{B} + \bar{C} + D) (\bar{A} + B + C + D) \cdot \\
 & (\bar{A} + B + \bar{C} + D) (A + B + C + D) (\bar{A} + \bar{B} + C + D) \cdot \\
 & (A + B + \bar{C} + \bar{D}) (A + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}) (\bar{A} + B + \bar{C} + \bar{D}) \cdot \\
 & (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D})
 \end{aligned}$$

		<i>CD</i>			
		00	01	11	10
<i>AB</i>	00	0	1	0	1
	01	0	1	0	0
	11	0	1	0	1
	10	0	1	0	0

Аудиторне вежбе из Дигиталних система

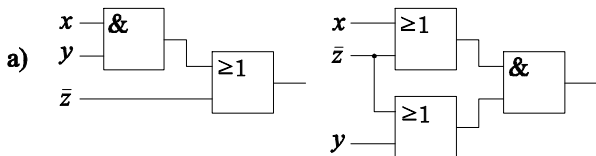
Минимизовање логичких функција

⇒

$$\begin{aligned} (A + \bar{B} + D) (\bar{A} + B + D) (C + D) (\bar{C} + \bar{D}) &= \bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + ABC\bar{D} \\ (A + \bar{B} + D) (\bar{A} + B + D) (C + D) (\bar{C} + \bar{D}) &= \\ \frac{(\bar{C}D + CD + \bar{A}B\bar{D} + AB\bar{D})}{(C + D) (\bar{C} + \bar{D}) (A + \bar{B} + D) (\bar{A} + B + \bar{D})} &= \end{aligned}$$

8. Нацртати реализацију помоћу логичких елемената упрошћених логичких функција добијених у задатку 7. користећи I и III логичка кола?

Решење:



Аудиторне вежбе из Дигиталних система

Минимизовање логичких функција

9. Упростити следеће функције и реализовати их са NI логичким колима. Дати две алтернативе:

а) $F_1 = A\bar{C} + ACE + AC\bar{E} + \bar{A}C\bar{D} + \bar{A}DE$

б) $F_2 = (\bar{B} + \bar{D})(\bar{A} + \bar{C} + D)(A + \bar{B} + \bar{C} + D)(\bar{A} + B + \bar{C} + \bar{D})$

Решење:

а)

		<i>CDE</i>							
		<i>AB</i>	000	001	011	010	110	111	101
а)	00	1	0	0	0	1	0	0	1
	01	1	0	0	0	1	0	0	1
	11	1	1	1	1	1	1	1	1
	10	1	1	1	1	1	1	1	1

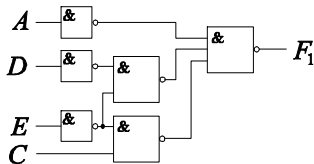
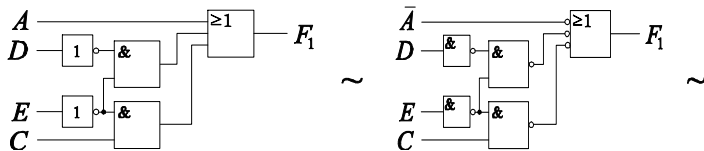
$$F_1 = A + \bar{D}\bar{E} + C\bar{E}$$

$$\bar{F}_1 = \bar{A}\bar{E} + \bar{A}C\bar{D} \rightarrow F = (A + \bar{E})(A + C + \bar{D})$$

Аудиторне вежбе из Дигиталних система

Минимизовање логичких функција, логички дијаграми

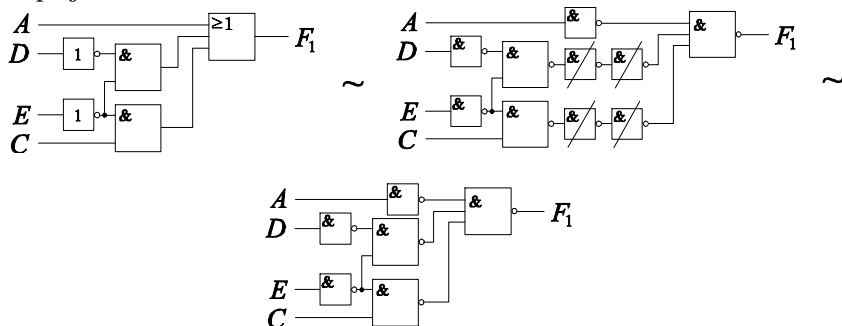
1. варијанта



Аудиторне вежбе из Дигиталних система

Минимизовање логичких функција, логички дијаграми

2. варијанта

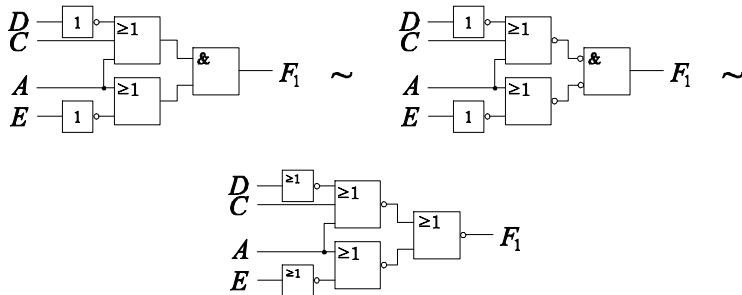


10. Поновити предходни задатак са НИЛ логичким елементима?

Решење:

Аудиторне вежбе из Дигиталних система Логичке функције

$\bar{F}_1 = \bar{A}E + \bar{A}C\bar{D} \implies F_1 = (A + \bar{E})(A + C + \bar{D})$ (на основу
мапе Вејч Карно из предходног задатка)



Аудиторне вежбе из Дигиталних система

Логички дијаграм

11. Реализовати следеће функције са NI елементима: а) $BD + BCD + \overline{ABCD} + \overline{ABCD}$ са не више од 6 логичких елемената сваки са 3 улаза б) $(AB + \overline{AB})(\overline{CD} + \overline{CD})$ са логичким елементима са два улаза?

Решење:

$$\text{а) } BD + BCD + \overline{ABCD} + \overline{ABCD} = BD(1 + C) + \overline{ABCD} + \overline{ABCD} =$$