Аудиторне вежбе из Рачунарског управљања

Дискретизација по времену

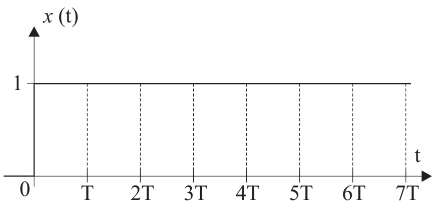
Зоран М. Бучевац

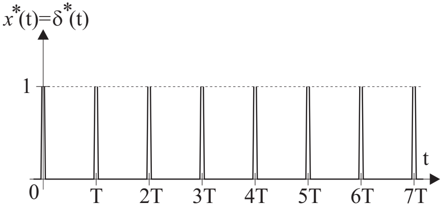
Машински факултет у Бгд.

октобар 2011.

1. Одредити излазни сигнал x^* идеалног одабирача периоде одабирања T ако је његов улазни сигнал x:
   а) $x(t) = h(t)$
   б) $x(t) = th(t)$
   в) $x(t) = e^{-\alpha t} h(t), \alpha \in]0, +\infty[$
   г) $x(t) = te^{-\alpha t} h(t), \alpha \in]0, +\infty[$
   д) $x(t) = e^{-\alpha t} (\sin \omega t) h(t), \alpha \in]0, +\infty[$

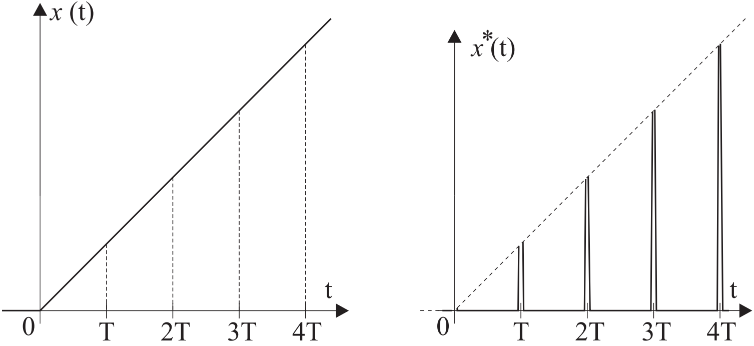
   Нацртати њихове графике, графике д искретизованих сигнала за све ове случајеве?
   Решење:
   а) $x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT)$
   $x(kT) = h(kT) = 1$
   $x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) = \delta^*(t)$





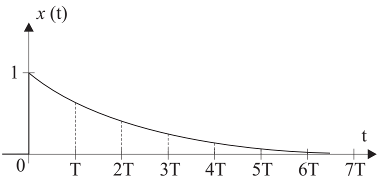
б) $x\left(kT\right) = kTh\left(kT\right) = kT$

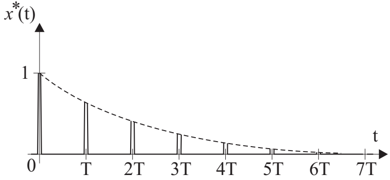
$$x^{*}\left(t\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(kT\right)\delta\left(t - kT\right)$$



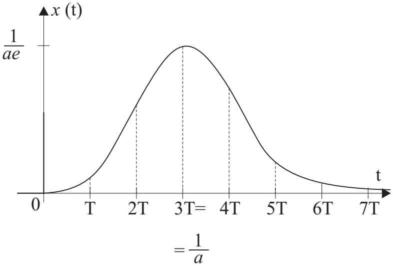
в) $x\left(kT\right) = e^{-\alpha kT} h\left(kT\right) = e^{-\alpha kT}$

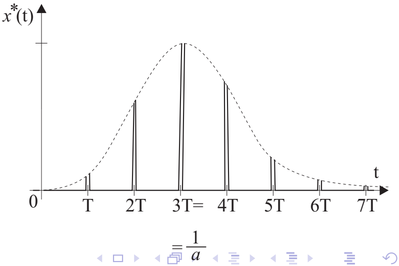
$$x^*\left(t\right) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha kT} \delta\left(t - kT\right)$$



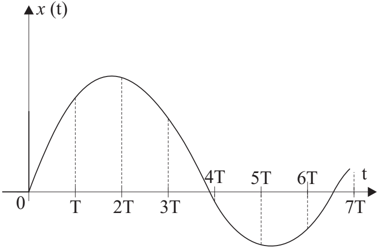


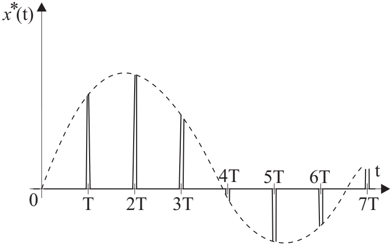
г) $x\left(kT\right)=\left(kT\right)e^{-\alpha kT}h\left(kT\right)=\left(kT\right)e^{-\alpha kT}$





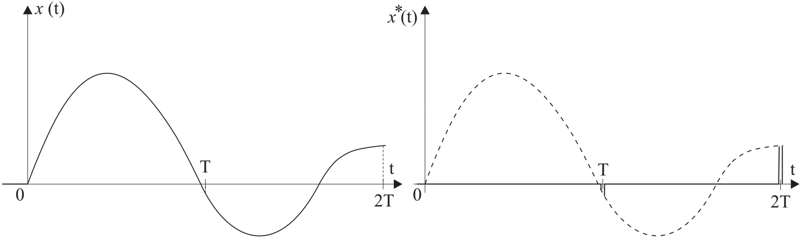
д) $x^{*}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha k T} \sin(k\omega T)\, \delta(t - kT)$





$\omega_0 > 2\omega$ испуњена Шенонова теорема

Дискретизација по времену, Шенонова теорема



$\omega_0 < 2\omega$ није испуњена Шенонова теорема

2. Одредити дискретни комплексни и фреквентни лик сигнала $x\left(t\right)=te^{-\alpha t}h\left(t\right)$?

   Решење:

   1. облик:

   $$X^{*}\left(s\right)=\sum_{k=0}^{\infty}x\left(kT\right)e^{-kTs}\Longrightarrow X^{*}\left(s\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(kT\right)e^{-\alpha kT}e^{-kTs}=$$

   $$\sum_{k=0}^{\infty}\left(kT\right)e^{-(s+\alpha)kT}=T\sum_{k=0}^{\infty}ke^{-(s+\alpha)kT}$$

   $$X^{*}\left(j\omega\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(kT\right)e^{-(j\omega+\alpha)kT}=T\sum_{k=0}^{\infty}ke^{-(j\omega+\alpha)kT}$$

   2. облик

   $$X^{*}\left(s\right)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X\left(s+jk\omega_0\right)\Longrightarrow X\left(s\right)=\mathcal{L}\left\{te^{-\alpha t}h\left(t\right)\right\}=\frac{1}{(s+\alpha)^2}$$

$$X^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s + jk\omega_0) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(s+jk\omega_0+\alpha)^2}$$

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[j(\omega + k\omega_0)] = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[j(\omega+k\omega_0)+\alpha]^2}$$

3. облик

$$X^*(s) = \sum_i \mathrm{Res} \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} X(p)\bigg|_{p=p_i^*} \implies X(p) = \frac{1}{(p+\alpha)^2} \implies p_1^* = -\alpha; \nu_1^* = 2$$

$$\mathrm{Res}\ \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} X(p)\bigg|_{p=p_i^*} = R_{i1} =$$

$$\frac{1}{(\nu_i^*-1)!}\frac{d^{\nu_i^*-1}}{dp^{\nu_i^*-1}}\left[(p-p_i^*)^{\nu_i^*}\frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}}X(p)\right]\bigg|_{p=p_i^*}$$

у вишеструком полу p_i^*

$$R_{11} = \frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dp}\left[(p-p_1^*)^2 \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} X(p)\right]\Big|_{p=p_1^*=-\alpha} =$$

$$\frac{d}{dp}\left[(p+\alpha)^2 \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} \frac{1}{(p+\alpha)^2}\right]\Big|_{p=p_1^*=-\alpha} = \frac{d}{dp}\frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}}\Big|_{p=p_1^*=-\alpha} =$$

$$-\frac{T\left(-e^{pT}e^{-sT}\right)}{[1-e^{pT}e^{-sT}]^2} = \frac{Te^{-(s+\alpha)T}}{\left[1-e^{-(s+\alpha)T}\right]^2} \Longrightarrow$$

$$X^*(s) = \sum_{i=1}^{1} \mathrm{Res}\, \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} X(p)\Big|_{p=p_1^*} = \frac{Te^{-(s+\alpha)T}}{\left[1-e^{-(s+\alpha)T}\right]^2} \Longrightarrow$$

$$X^*(j\omega) = \frac{Te^{-(j\omega+\alpha)T}}{\left[1-e^{-(j\omega+\alpha)T}\right]^2}$$

3. За сигнал $x(t) = e^{-\alpha t}(\sin\beta t)\, h(t)$ одредити дискретни комплексни и фреквентни лик?
   Решење:
   1. облик
   $x(t) = e^{-\alpha t}\left(\frac{e^{j\beta t}-e^{-j\beta t}}{2j}\right) h(t) = C\left(e^{wt} - e^{\overline{w}t}\right) h(t); C = \frac{1}{2j}, w = -(\alpha - j\beta), \overline{w} = -(\alpha + j\beta)$

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\, e^{-kTs} \Longrightarrow X^*(s) =$$

$$C\left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{kTw} e^{-kTs} - \sum_{k=0}^{\infty} e^{kT\overline{w}} e^{-kTs}\right) =$$

$$C\left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{kT(w-s)} - \sum_{k=0}^{\infty} e^{kT(\overline{w}-s)}\right) = C\frac{1}{1-e^{-T(s-w)}} - C\frac{1}{1-e^{-T(s-\overline{w})}} =$$

$$\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1-e^{-Ts}e^{-(\alpha-j\beta)T}} - \frac{1}{1-e^{-Ts}e^{-(\alpha+j\beta)T}}\right) =$$

$$\frac{1}{2j}\left(\frac{\left[1-e^{-Ts}e^{-(\alpha+j\beta)T}\right]-\left[1-e^{-Ts}e^{-(\alpha-j\beta)T}\right]}{\left[1-e^{-Ts}e^{-(\alpha-j\beta)T}\right]\left[1-e^{-Ts}e^{-(\alpha+j\beta)T}\right]}\right) \Longrightarrow X^*(s) =$$

$$\frac{e^{-(s+\alpha)T}\sin\beta T}{1-2e^{-(s+\alpha)T}\cos\beta T+e^{-2(s+\alpha)T}}$$

$$X^*(j\omega) = \frac{e^{-(j\omega+\alpha)T}\sin\beta T}{1-2e^{-(j\omega+\alpha)T}\cos\beta T+e^{-2(j\omega+\alpha)T}}$$

2. облик

$$X^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s+jk\omega_0)\,;\, x(t) = e^{-\alpha t}(\sin\beta t)\, h(t) \Longrightarrow X(s) =$$

$$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2} \Longrightarrow X^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\beta}{(s+jk\omega_0+\alpha)^2+\beta^2}$$

3. облик

$$X^*(s) = \sum_i \mathrm{Res}\,\frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}}X(p)\Big|_{p=p_i^*} \Longrightarrow X(p) = \frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2} \Longrightarrow p_1^* = -\alpha+j\beta;\, p_2^* = -\alpha-j\beta$$

$$X^*(s) = \sum_{i=1}^{2}\mathrm{Res}\,\frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}}X(p)\Big|_{p=p_i^*} = \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}}\mathrm{Res}\,X(p)\big|_{p=p_i^*} =$$

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}}\,\frac{\beta}{\left[(p+\alpha)^2+\beta^2\right]'}\Bigg|_{p=p_i^*} = \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}}\,\frac{\beta}{2(p+\alpha)}\Bigg|_{p=p_i^*} =$$

$$\frac{1}{1-e^{-T\left(s-p_1^*\right)}}\,\frac{\beta}{2\left(p_1^*+\alpha\right)} + \frac{1}{1-e^{-T\left(s-p_2^*\right)}}\,\frac{\beta}{2\left(p_2^*+\alpha\right)} =$$

$$\frac{1}{1-e^{-T[s-(-\alpha+j\beta)]}}\,\frac{\beta}{2(-\alpha+j\beta+\alpha)} + \frac{1}{1-e^{-T[s-(-\alpha-j\beta)]}}\,\frac{\beta}{2(-\alpha-j\beta+\alpha)} =$$

$$\frac{1}{2j}\,\frac{1}{1-e^{-T[s-(-\alpha+j\beta)]}} - \frac{1}{2j}\,\frac{1}{1-e^{-T[s-(-\alpha-j\beta)]}} =$$

$$\frac{1}{2j}\,\frac{1-e^{-T[s-(-\alpha-j\beta)]}-1-e^{-T[s-(-\alpha+j\beta)]}}{\left[1-e^{-T[s-(-\alpha+j\beta)]}\right]\left[1-e^{-T[s-(-\alpha-j\beta)]}\right]} = \frac{e^{-T(s+\alpha)}\sin\beta T}{1-2e^{-T(s+\alpha)}\cos\beta T+e^{-2T(s+\alpha)}}$$

$$X^*(s) = \frac{e^{-T(s+\alpha)}\sin\beta T}{1-2e^{-T(s+\alpha)}\cos\beta T+e^{-2T(s+\alpha)}} \Longrightarrow$$
$$X^*(j\omega) = \frac{e^{-T(j\omega+\alpha)}\sin\beta T}{1-2e^{-T(j\omega+\alpha)}\cos\beta T+e^{-2T(j\omega+\alpha)}}$$

4. Одредити сва три облика комплексног лика излазног сигнала $x^*(t)$ идеалног одабирача ако је његов улазни сигнал $x(t) = \left(2e^{-t}+e^{-2t}\right)h(t)$. Одредити све нуле и полове тог комплексног лика?

   Решење:

   1. облик комплексног лика

   $x(t) = \left(2e^{-t}+e^{-2t}\right)h(t) \Longrightarrow X(s) = \frac{2}{s+1}+\frac{1}{s+2} = \frac{2(s+2)+(s+1)}{(s+1)(s+2)} = \frac{3s+5}{(s+1)(s+2)} \Longrightarrow s_1^* = -1; s_2^* = -2; s_1^0 = -\frac{5}{3} = -1,\dot{6};\ x(kT) = \left(2e^{-kT}+e^{-2kT}\right)h(kT) = \left(2e^{-kT}+e^{-2kT}\right)$

   $$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}; \Longrightarrow X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(2e^{-kT}+e^{-2kT}\right)e^{-kTs}$$

2. облик

$$X^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s + jk\omega_0)\,;\, X(s) = \frac{3s+5}{(s+1)(s+2)} \Longrightarrow X^*(s) =$$

$$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{3(s+jk\omega_0)+5}{(s+jk\omega_0+1)(s+jk\omega_0+2)}$$

3. облик

$$X^*(s) = \sum_i \mathrm{Res}\, \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} X(p)\Big|_{p=p_i^*} \Longrightarrow X(p) = \frac{3p+5}{(p+1)(p+2)} \Longrightarrow p_1^* = -1; p_2^* = -2$$

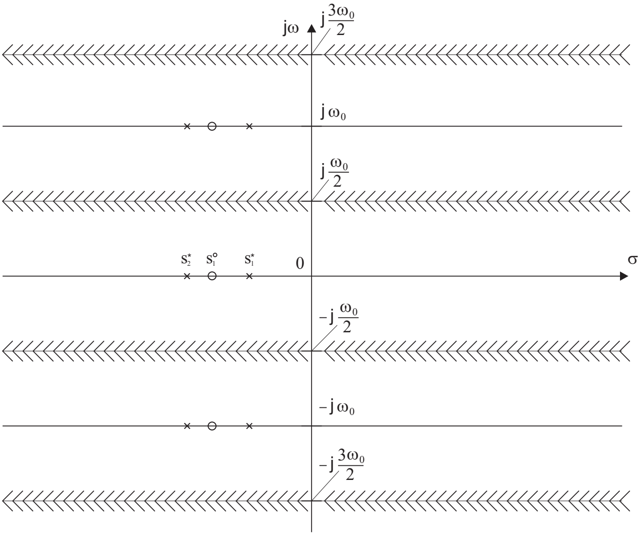
$$X^*(s) = \sum_{i=1}^{2} \mathrm{Res}\, \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} X(p)\Big|_{p=p_i^*} = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} \mathrm{Res}\, X(p)\big|_{p=p_i^*} =$$

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} \left.\frac{3p+5}{[(p+1)(p+2)]'}\right|_{p=p_i^*} = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} \left.\frac{3p+5}{2p+3}\right|_{p=p_i^*} =$$

$$\frac{1}{1-e^{p_1^*T}e^{-sT}} \frac{3p_1^*+5}{2p_1^*+3} + \frac{1}{1-e^{p_2^*T}e^{-sT}} \frac{3p_2^*+5}{2p_2^*+3} = \frac{2}{1-e^{-T}e^{-sT}} + \frac{1}{1-e^{-2T}e^{-sT}} =$$

$$\frac{2}{1-e^{-T(s+1)}} + \frac{1}{1-e^{-T(s+2)}}$$

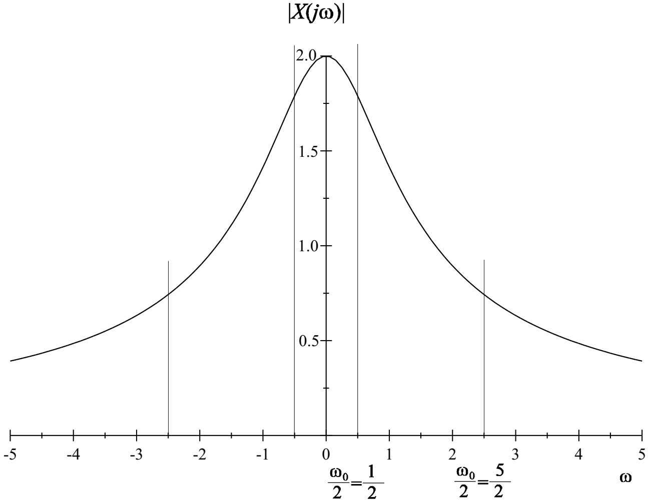
Аудиторне вежбе из Рачунарског управљања
Дискретни комплексни и фреквентни лик

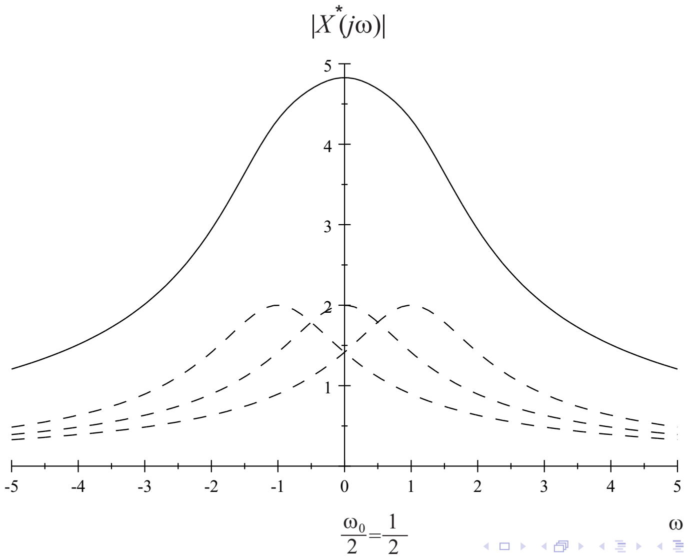


5. Нацртати фреквентни спектар излазног сигнала $x^*(t)$ идеалног одабирача ако је његов улазни сигнал $x(t) = 2e^{-t}h(t)$ за две вредности учестаности одабирања: $\omega_0 = 1\mathrm{rad/s}$ и $\omega_0 = 5\mathrm{rad/s}$. Продискутовати добијено решење?

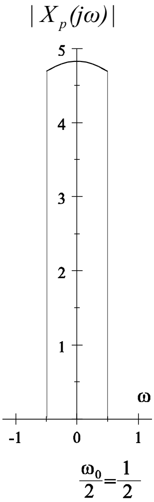
   Решење:

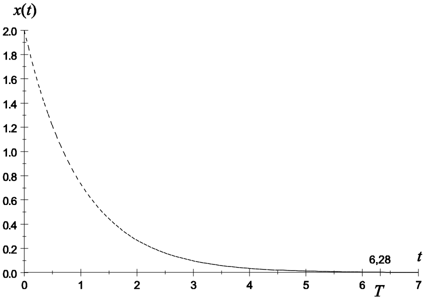
   $$x(t) = 2e^{-t}h(t) \Longrightarrow X(s) = \frac{2}{s+1} \Longrightarrow X(j\omega) = \frac{2}{1+j\omega}\frac{1-j\omega}{1-j\omega} = \frac{2}{1+\omega^2} - j\frac{2\omega}{1+\omega^2} \Longrightarrow |X(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)^2 + \left(-\frac{2\omega}{1+\omega^2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

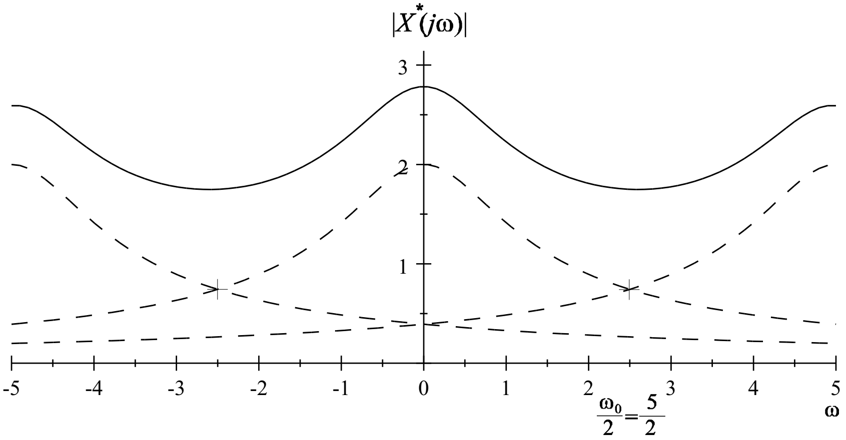

|X(jω)|
2.0
1.5
1.0
0.5
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
ω₀/2 = 1/2
ω₀/2 = 5/2
ω

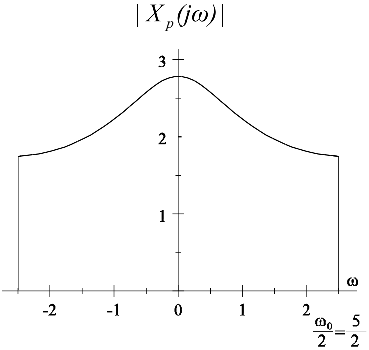

$|X^*(j\omega)|$
5
4
3
2
1
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
$\frac{\omega_0}{2}=\frac{1}{2}$
ω

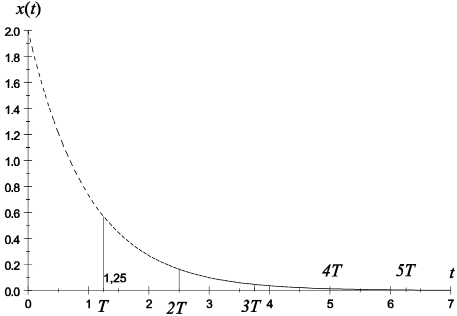
Аудиторне вежбе из Рачунарског управљања
Дискретни комплексни и фреквентни лик



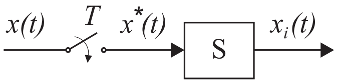



$|X^*(j\omega)|$
3
2
1
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
$\frac{\omega_0}{2}=\frac{5}{2}$
ω

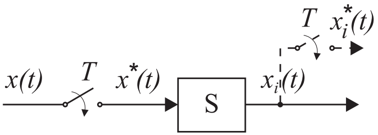

$|X_p(j\omega)|$
3
2
1
-2
-1
0
1
2
ω
$\frac{\omega_0}{2}=\frac{5}{2}$

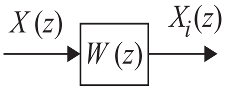

x(t)
2.0
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
1
T
2
2T
3
3T
4
5
6
7
4T
5T
t
1,25

6. Посматра се систем приказан на слици. Одредити трећи облик комплексног лика дискретног излазног сигнала система S за случај да је $X(s) = \frac{1}{s}$ а преносна функција система S и периода одабирања, $W(s) = \frac{1}{s+1}; T = 0,1\,\mathrm{sec}$?



Решење:





3. облик $W^*(s)$

$$W^*(s) = \sum_i \mathrm{Res}\, \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} W(p)\Big|_{p=p_i^*} \implies W(p) = \frac{1}{1+p} \implies p_1^* = -1$$

$$W^*(s) = \sum_{i=1}^{1} \mathrm{Res}\, \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} W(p)\Big|_{p=p_i^*} = \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} \mathrm{Res}\, W(p)|_{p=p_i^*} =$$

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} \; \frac{1}{(p+1)'}\Big|_{p=p_i^*} = \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}}\Big|_{p=p_i^*} =$$

$$\frac{1}{1-e^{p_1^*T}e^{-sT}} = \frac{1}{1-e^{-T}e^{-sT}} = \frac{1}{1-e^{-T(s+1)}}$$

$X^*(s)$

$$X^*(s) = \sum_{i=0}^{\infty} x(kT)\, e^{-kTs} = \sum_{i=0}^{\infty} h(kT)\, e^{-kTs} = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-kTs} =$$

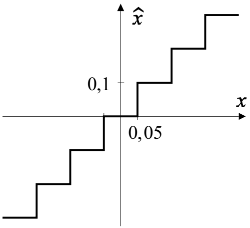
$$1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \cdots + e^{-kTs} + \cdots + \implies$$

$$X^*(s) = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-e^{-sT}}$$

3. облик $X_i^*(s)$

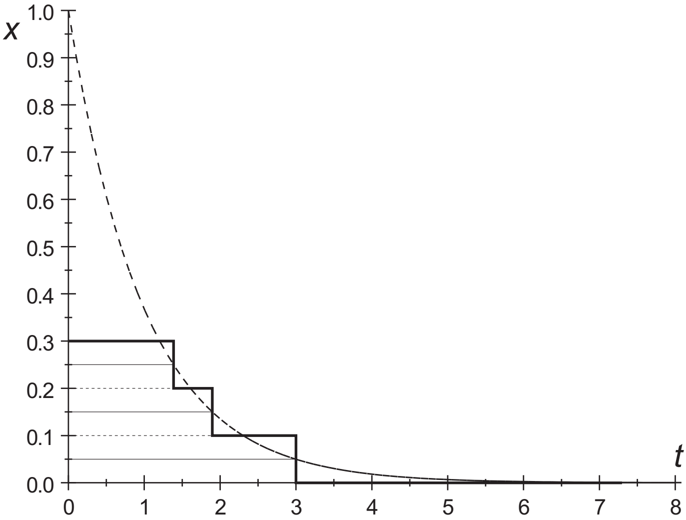
$$X_i^*(s) = W^*(s)\, X^*(s) = \frac{1}{1-e^{-T(s+1)}} \frac{1}{1-e^{-sT}}$$

1. Графички одредити излазни сигнал предајника који садржи нелинеарност приказану на слици, а за улазни сигнал $x(t) = e^{-t}h(t)$:



Решење:

Први колоквијум из Рачунарског управљања



2. Одредити сва три облика комплексног лика излазног сигнала $x^*(t)$ идеалног одабирача ако је његов улазни сигнал x:

$$x(t) = (5\sin 2t)\, h(t).$$

Такође, одредити све нуле и полове тог комплексног лика?

Решење:

1. облик:

$x(t) = (5\sin 2t)\, h(t) = 5\left(\frac{e^{j2t} - e^{-j2t}}{2j}\right) h(t) = C\left(e^{j2t} - e^{-j2t}\right) h(t);$

$C = \frac{5}{2j}$

$X^*(s) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x(kT)\, e^{-kTs} \Longrightarrow X^*(s) =$

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} C\left(e^{j2kT} - e^{-j2kT}\right) e^{-kTs} =$

$C\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{j2kT} e^{-kTs} - e^{-j2kT} e^{-kTs}\right) =$

$$C\left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{j2kT}e^{-kTs}-\sum_{k=0}^{\infty} e^{-j2kT}e^{-kTs}\right)=$$

$$C\left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{kT(j2-s)}-\sum_{k=0}^{\infty} e^{kT(-j2-s)}\right)=C\frac{1}{1-e^{-T(s-2j)}}-C\frac{1}{1-e^{-T(s+2j)}}=$$

$$\frac{5}{2j}\left(\frac{1}{1-e^{-Ts}e^{j2T}}-\frac{1}{1-e^{-Ts}e^{-j2T}}\right)=\frac{5}{2j}\left(\frac{\left[1-e^{-Ts}e^{-j2T}\right]-\left[1-e^{-Ts}e^{j2T}\right]}{\left[1-e^{-Ts}e^{j2T}\right]\left[1-e^{-Ts}e^{-j2T}\right]}\right)=$$

$$\frac{5e^{-Ts}\left(\frac{e^{j2T}-e^{-j2T}}{2j}\right)}{1-2e^{-Ts}\frac{\left(e^{j2T}+e^{-j2T}\right)}{2}+e^{-2Ts}}=\frac{5e^{-Ts}\sin 2T}{1-2e^{-Ts}\cos 2T+e^{-2Ts}}$$

$$\Longrightarrow X^*(s)=\frac{5e^{-Ts}\sin 2T}{1-2e^{-Ts}\cos 2T+e^{-2Ts}}$$

2. облик

$$X^*(s)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s+jk\omega_0)\Longrightarrow X(s)=\mathcal{L}\left\{(5\sin 2t)\,h(t)\right\}=\frac{10}{s^2+4}$$

$$X^*(s)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s+jk\omega_0)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{10}{(s+jk\omega_0)^2+4}$$

3. облик

$$X^*(s) = \sum_i \text{Res} \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} X(p)\Big|_{p=p_i^*} \implies X(p) = \frac{10}{p^2+4} \implies p_1^* = +2j, p_2^* = -2j$$

$$X^*(s) = \sum_{i=1}^{2} \text{Res} \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} X(p)\Big|_{p=p_i^*} = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} \text{Res}\ X(p)\big|_{p=p_i^*} =$$

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} \frac{10}{[p^2+4]'}\Big|_{p=p_i^*} = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} \frac{5}{p}\Big|_{p=p_i^*} =$$

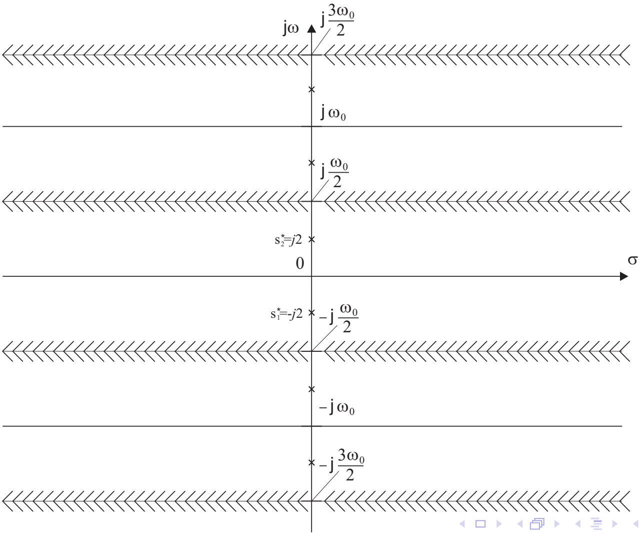
$$\frac{1}{1-e^{p_1^*T}e^{-sT}} \frac{5}{p_1^*} + \frac{1}{1-e^{p_2^*T}e^{-sT}} \frac{5}{p_2^*} = \frac{5}{1-e^{j2T}e^{-sT}} \frac{1}{2j} + \frac{5}{1-e^{-j2T}e^{-sT}} \frac{1}{-2j} =$$

$$\frac{-j2{,}5}{1-e^{j2T}e^{-sT}} + \frac{j2{,}5}{1-e^{-j2T}e^{-sT}} =$$

$$\frac{-j2{,}5\left(1-e^{-j2T}e^{-sT}\right)+j2{,}5\left(1-e^{j2T}e^{-sT}\right)}{(1-e^{j2T}e^{-sT})(1-e^{-j2T}e^{-sT})} = \frac{j2{,}5\left(1-e^{j2T}e^{-sT}-1+e^{-j2T}e^{-sT}\right)}{(1-e^{j2T}e^{-sT})(1-e^{-j2T}e^{-sT})} =$$

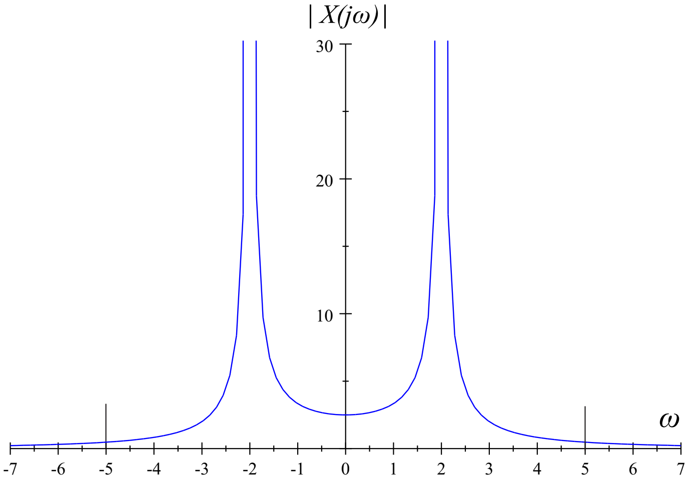
$$\frac{-j2{,}5e^{-sT}2j\,\frac{\left(e^{j2T}-e^{-j2T}\right)}{2j}}{1-e^{j2T}e^{-sT}-e^{-j2T}e^{-sT}+e^{j2T}e^{-sT}e^{-j2T}e^{-sT}} =$$

$$\frac{5e^{-sT}\sin 2T}{1-2e^{-sT}\frac{(e^{j2T}+e^{-j2T})}{2}+e^{-2sT}} = \frac{5e^{-sT}\sin 2T}{1-2e^{-sT}\cos 2T+e^{-2sT}}$$



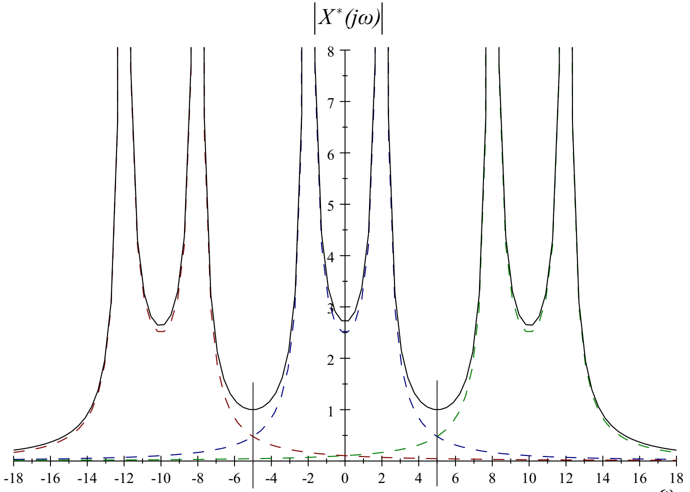
3. Нацртати фреквентни спектар сигнала x из предходног задатка. На основу тога извршити избор периоде одабирања и нацртати фреквентни спектар сигнала $x(t)$ на улазу у идеални нископропусни пригушивач и фреквентни спектар његовог излазног сигнала?
   Решење:
   $$x(t) = (5\sin 2t)\, h(t) \Longrightarrow X(s) = \frac{10}{s^2+4} \Longrightarrow X(j\omega) = \frac{10}{4-\omega^2} \Longrightarrow$$
   $$|X(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{10}{4-\omega^2}\right)^2 + 0^2} = \frac{10}{\sqrt{(4-\omega^2)^2}} = \left|\frac{10}{4-\omega^2}\right|.$$

Први колоквијум из Рачунарског управљања



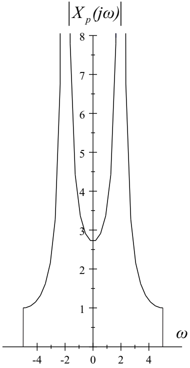
$$\frac{\omega_0}{2} = \frac{10}{2}$$

Први колоквијум из Рачунарског управљања

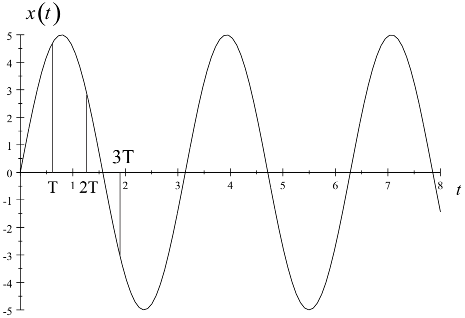


$$\frac{\omega_0}{2} = \frac{10}{2}$$

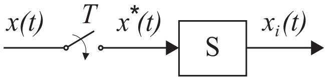
Први колоквијум из Рачунарског управљања



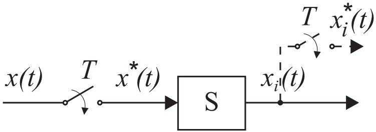
$$\frac{\omega_0}{2} = \frac{10}{2}$$

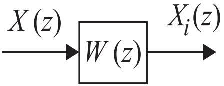


4. Посматра се систем приказан на слици. Одредити трећи облик комплексног лика дискретног излазног сигнала система C за случај да је $X(s) = \frac{1}{s}$ а преносна функција система C и периода одабирања $W(s) = 1; T = 0,1s$.



Решење:





3. облик $W^*(s)$

$$W^*(s) = \sum_i \mathrm{Res}\, \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} W(p)\Big|_{p=p_i^*} \implies W(p) = 1 \implies W^*(s) = 1$$

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\, e^{-kTs} = \sum_{k=0}^{\infty} h(kT)\, e^{-kTs} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs} =$$

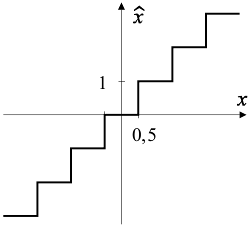
$$1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \cdots + e^{-kTs} + \cdots + \implies$$

$$X^*(s) = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-e^{-sT}}$$

3. облик $X_i^*(s)$

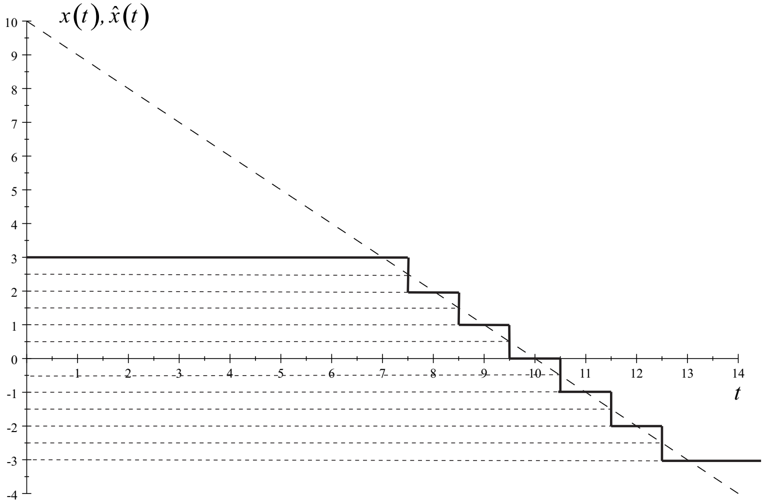
$$X_i^*(s) = W^*(s)\, X^*(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}}$$

1. Графички одредити излазни сигнал предајника који садржи нелинеарност приказану на слици, а за улазни сигнал $x(t) = (10 - t)\, h(t)$:



Решење:

Први колоквијум из Рачунарског управљања



2. Одредити сва три облика комплексног лика излазног сигнала $x^*(t)$ идеалног одабирача ако је његов улазни сигнал x:

$$x(t) = (5\sin 2t)\, h(t)\,.$$

Такође, одредити све нуле и полове тог комплексног лика?
Решење:
1. облик:
$x(t) = (5\sin 2t)\, h(t) = 5\left(\frac{e^{j2t}-e^{-j2t}}{2j}\right) h(t) = C\left(e^{j2t} - e^{-j2t}\right) h(t)\,;$
$C = \frac{5}{2j}$
$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\, e^{-kTs} \Longrightarrow X^*(s) =$
$\sum_{k=0}^{\infty} C\left(e^{j2kT} - e^{-j2kT}\right) e^{-kTs} =$
$C\left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{j2kT} e^{-kTs} - e^{-j2kT} e^{-kTs}\right) =$

$$C\left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{j2kT}e^{-kTs} - \sum_{k=0}^{\infty} e^{-j2kT}e^{-kTs}\right) =$$

$$C\left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{kT(j2-s)} - \sum_{k=0}^{\infty} e^{kT(-j2-s)}\right) = C\frac{1}{1-e^{-T(s-2j)}} - C\frac{1}{1-e^{-T(s+2j)}} =$$

$$\frac{5}{2j}\left(\frac{1}{1-e^{-Ts}e^{j2T}} - \frac{1}{1-e^{-Ts}e^{-j2T}}\right) = \frac{5}{2j}\left(\frac{\left[1-e^{-Ts}e^{-j2T}\right]-\left[1-e^{-Ts}e^{j2T}\right]}{\left[1-e^{-Ts}e^{j2T}\right]\left[1-e^{-Ts}e^{-j2T}\right]}\right) =$$

$$\frac{5e^{-Ts}\left(\frac{e^{j2T}-e^{-j2T}}{2j}\right)}{1-2e^{-Ts}\frac{\left(e^{j2T}+e^{-j2T}\right)}{2}+e^{-2Ts}} = \frac{5e^{-Ts}\sin 2T}{1-2e^{-Ts}\cos 2T+e^{-2Ts}}$$

$$\Longrightarrow X^*(s) = \frac{5e^{-Ts}\sin 2T}{1-2e^{-Ts}\cos 2T+e^{-2Ts}}$$

2. облик

$$X^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s+jk\omega_0) \Longrightarrow X(s) = \mathcal{L}\left\{(5\sin 2t)\,h(t)\right\} = \frac{10}{s^2+4}$$

$$X^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s+jk\omega_0) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{10}{(s+jk\omega_0)^2+4}$$

3. облик

$$X^*(s) = \sum_i \mathrm{Res}\, \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} X(p)\Big|_{p=p_i^*} \implies X(p) = \frac{10}{p^2+4} \implies p_1^* = +2j, p_2^* = -2j$$

$$X^*(s) = \sum_{i=1}^{2} \mathrm{Res}\, \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} X(p)\Big|_{p=p_i^*} = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} \mathrm{Res}\, X(p)\big|_{p=p_i^*} =$$

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} \frac{10}{[p^2+4]'}\Big|_{p=p_i^*} = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} \frac{5}{p}\Big|_{p=p_i^*} =$$

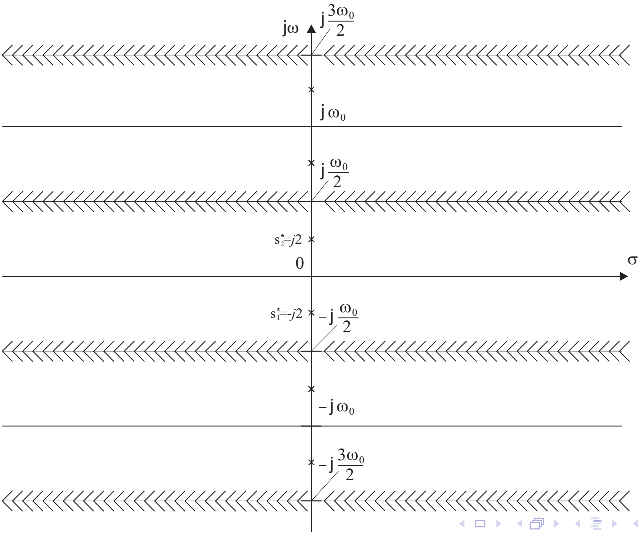
$$\frac{1}{1-e^{p_1^*T}e^{-sT}} \frac{5}{p_1^*} + \frac{1}{1-e^{p_2^*T}e^{-sT}} \frac{5}{p_2^*} = \frac{5}{1-e^{j2T}e^{-sT}} \frac{1}{2j} + \frac{5}{1-e^{-j2T}e^{-sT}} \frac{1}{-2j} =$$

$$\frac{-j2{,}5}{1-e^{j2T}e^{-sT}} + \frac{j2{,}5}{1-e^{-j2T}e^{-sT}} =$$

$$\frac{-j2{,}5\left(1-e^{-j2T}e^{-sT}\right)+j2{,}5\left(1-e^{j2T}e^{-sT}\right)}{(1-e^{j2T}e^{-sT})(1-e^{-j2T}e^{-sT})} = \frac{j2{,}5\left(1-e^{j2T}e^{-sT}-1+e^{-j2T}e^{-sT}\right)}{(1-e^{j2T}e^{-sT})(1-e^{-j2T}e^{-sT})} =$$

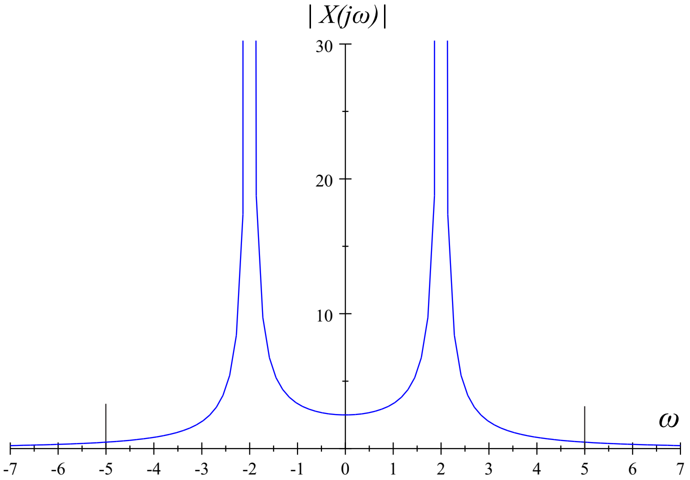
$$\frac{-j2{,}5e^{-sT}2j\,\dfrac{\left(e^{j2T}-e^{-j2T}\right)}{2j}}{1-e^{j2T}e^{-sT}-e^{-j2T}e^{-sT}+e^{j2T}e^{-sT}e^{-j2T}e^{-sT}} =$$

$$\frac{5e^{-sT}\sin 2T}{1-2e^{-sT}\frac{(e^{j2T}+e^{-j2T})}{2}+e^{-2sT}} = \frac{5e^{-sT}\sin 2T}{1-2e^{-sT}\cos 2T+e^{-2sT}}$$

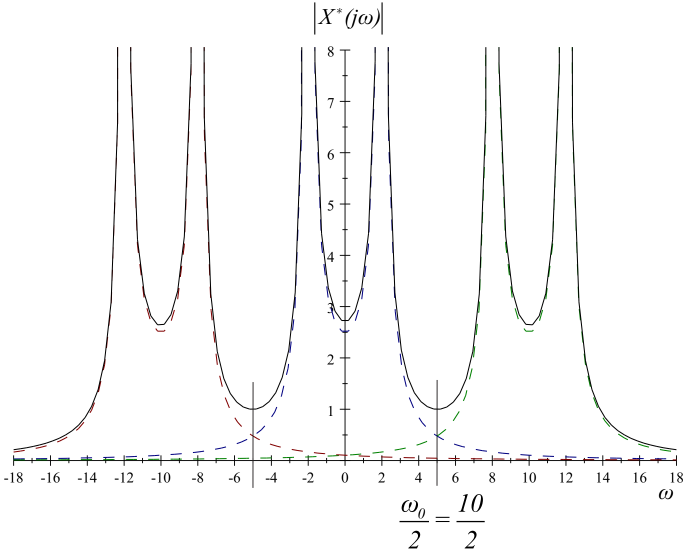


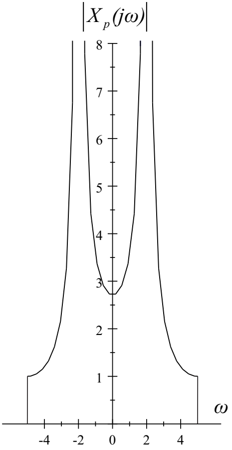
3. Нацртати фреквентни спектар сигнала x из предходног задатка. На основу тога извршити избор периоде одабирања и нацртати фреквентни спектар сигнала $x(t)$ на улазу у идеални нископропусни пригушивач и фреквентни спектар његовог излазног сигнала?
   Решење:
   $x(t) = (5\sin 2t)\, h(t) \Longrightarrow X(s) = \frac{10}{s^2+4} \Longrightarrow X(j\omega) = \frac{10}{4-\omega^2} \Longrightarrow$
   $|X(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{10}{4-\omega^2}\right)^2 + 0^2} = \frac{10}{\sqrt{(4-\omega^2)^2}} = \left|\frac{10}{4-\omega^2}\right|.$

Први колоквијум из Рачунарског управљања

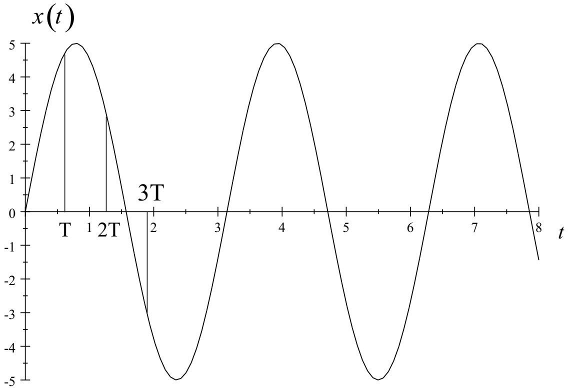


$$\frac{\omega_0}{2} = \frac{10}{2}$$

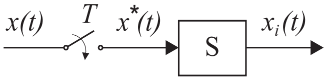

$|X^*(j\omega)|$
8
7
6
5
4
3
2
1
-18 -16 -14 -12 -10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10 12 14 16 18
ω
$\frac{\omega_0}{2} = \frac{10}{2}$



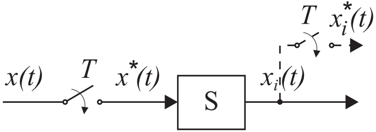
$$\frac{\omega_0}{2} = \frac{10}{2}$$



4. Посматра се систем приказан на слици. Одредити трећи облик комплексног лика дискретног излазног сигнала система C за случај да је $X(s) = \frac{1}{s+1}$ а преносна функција система C и периода одабирања $W(s) = 1; T = 0,1s$.



Решење:



$W^*(s) = 1,$

3. облик $X^*(s)$

$$X^*(s) = \sum_i \mathrm{Res}\, \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} X(p) \Big|_{p=p_i^*} \implies X(p) = \frac{1}{p+1}$$

$$X^*(s) = \sum_{i=1}^{1} \mathrm{Res}\, \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} X(p) \Big|_{p=p_i^*} = \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} \mathrm{Res}\, X(p)\Big|_{p=p_i^*} =$$

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} \frac{1}{(p+1)'} \Big|_{p=p_i^*} = \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{1-e^{pT}e^{-sT}} \Big|_{p=p_i^*} =$$

$$\frac{1}{1-e^{p_1^*T}e^{-sT}} = \frac{1}{1-e^{-T}e^{-sT}} = \frac{1}{1-e^{-T(s+1)}}$$

$$X_i^*(s) = X^*(s) \implies X_i^*(s) = \frac{1}{1-e^{-T(s+1)}}$$