Аудиторне вежбе из дигиталних система

Булова алгебра

Зоран М. Бучевац

Машински факултет у Бгд.

октобар 2011.

1. Који од шест основних закона (затвореност, асоцијативност, комутативност, неутралност, инверзија, дистрибуција) су испуњени за бинарне операције дефинисане табеларно:

$+$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$\cdot$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

?

Решење:

a) Скуп $B = \{0, 1, 2\}$ је затворен у односу на задате операторе $+$ и $\cdot$, пошто сваком пару елемената из B оператори $+$ и $\cdot$ придружују јединствен елемент из B (видети из табела).

Булова алгебра

б)

xyz	$x+(y+z)$	$(x+y)+z$	$x\cdot(y\cdot z)$	$x\cdot(y\cdot z)$
000	0	0	0	0
001	0	0	1	1
002	0	0	2	2
010	0	0	1	1
011	0	0	1	1
012	0	0	2	2
020	0	0	2	2
021	0	0	2	2
022	0	0	2	2
100	0	0	1	1
101	0	0	1	1
102	0	0	2	2
110	0	0	1	1
111	1	1	1	1

$\Longrightarrow$

б)

xyz	$x+(y+z)$	$(x+y)+z$	$x\cdot(y\cdot z)$	$x\cdot(y\cdot z)$
112	1	1	2	2
120	0	0	2	2
121	1	1	2	2
122	1	1	2	2
200	0	0	2	2
201	0	0	2	2
202	0	0	2	2
210	0	0	2	2
211	1	1	2	2
212	1	1	2	2
220	0	0	2	2
221	1	1	2	2
222	2	2	2	2

После провере види се да важи асоцијативни закон.

в)

xy	$x+y$	$y+x$	$x \cdot y$	$y \cdot x$
00	0	0	0	0
01	0	0	1	1
02	0	0	2	2
10	0	0	1	1
11	1	1	1	1
12	1	1	2	2
20	0	0	2	2
21	1	1	2	2
22	2	2	2	2

Комутативни закон важи што се види на основу провере.

г) Неутрални елемент у односу на бинарну операцију $+$ је 2 што потврђује следећа табела:

x	$x+2$	$2+x$
0	0	0
1	1	1
2	2	2

Неутрални елемент у односу на бинарну операцију $\cdot$ је 0 што потврђује следећа табела:

x	$x \cdot 0$	$0 \cdot x$
0	0	0
1	1	1
2	2	2

д) Инверзија у овом случају није задовољена! За $x = 0 \nexists$ $y \in B$ тако да $0 + y = 2$; за $x = 1 \nexists$ $y \in B$ тако да је $1 \cdot y = 0$.

ђ)

xyz	$x + (y \cdot z)$	$(x + y) \cdot (x + z)$	$x \cdot (y + z)$	$(x \cdot y) + (y \cdot z)$
000	0	0		
001	0	0		
002	0	0		
010	0	0		
011	0	0		
012	0	0		
020	0	0		
021	0	0		
022	0	0		
100	0	0		

ђ)

xyz	$x + (y \cdot z)$	$(x + y) \cdot (x + z)$	$x \cdot (y + z)$	$(x \cdot y) + (y \cdot z)$
101	1	1		
102	1	1		
110	1	1		
111	1	1		
112	1	1		
120	1	1		
121	1	1		
122	1	1		
200	0	0		

ђ)

xyz	$x + (y \cdot z)$	$(x + y) \cdot (x + z)$	$x \cdot (y + z)$	$(x \cdot y) + (y \cdot z)$
201	1	1		
202	2	2		
210	1	1		
211	1	1		
212	2	2		
220	2	2		
221	2	2		
222	2	2		

После провере види се да важи и дистрибутивни закон.

2. Показати да скуп три елемента $\{0, 1, 2\}$ и два претходно дефинисана оператора $+$ и $\cdot$ не претстављају Булову алгебру. Који од Хантингтонових постулата не важи?

Решење:
5. постулат Хантингтона није испуњен. За $x = 0$ $\nexists y \in \{0, 1, 2\}$ тако да $x + y = 0$ односно за $x = 2$ $\nexists y \in \{0, 1, 2\}$ тако да $x \cdot y = 2$. Из наведеног се види да не важи да за $\forall x$ $\exists \bar{x}$ тако да $x + \bar{x} = 0$ односно $\forall x$ $\exists \bar{x}$ тако да $x \cdot \bar{x} = 2$, $\bar{x} \in B$.

3. Помоћу табеле вредности верификовати исправност следећих теорема Булове алгебре:
   а) асоцијативни
   б) ДеМорганова теорема за три променљиве
   в) Дистрибутивни закон оператора + у односу на ·?

Решење:

xyz	$x+(y+z)$	$(x+y)+z$	$\overline{(x+y+z)}$	$\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}$
000	0	0	1	1
001	1	1	0	0
010	1	1	0	0
011	1	1	0	0
100	1	1	0	0
101	1	1	0	0
110	1	1	0	0
111	1	1	0	0

xyz	$\overline{(xyz)}$	$(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})$	$x+y\cdot z$	$(x+y)\cdot(x+z)$
000	1	1	0	0
001	1	1	0	0
010	1	1	0	0
011	1	1	1	1
100	1	1	1	1
101	1	1	1	1
110	1	1	1	1
111	0	0	1	1

4. Решити предходни проблем применом Веновог дијаграма?
5. Упростити следеће Булове функције до најмањег броја слова:
   а) $xy + x\bar{y}$
   б) $(x+y)(x+\bar{y})$

в) $xyz + \bar{x}y + xy\bar{z}$

г) $zx + z\bar{x}y$

д) $\overline{(A+B)}\overline{(\bar{A}+\bar{B})}$

ђ) $y(w\bar{z} + wz) + xy$

Решење:

а) $xy + x\bar{y} = x(y + \bar{y}) = x$

б) $(x+y)(x+\bar{y}) = x + y\bar{y} = x$

в) $xyz + \bar{x}y + xy\bar{z} = xyz + \bar{x}y + \bar{x}y + xy\bar{z} = y(\bar{x} + xz) + y(\bar{x} + x\bar{z}) \Longrightarrow$
$y(\bar{x} + x)(\bar{x} + z) + y(\bar{x} + x)(\bar{x} + \bar{z}) = y(\bar{x} + z) + y(\bar{x} + \bar{z}) \Longrightarrow$
$y(\bar{x} + z + \bar{x} + \bar{z}) = (\bar{x} + 1) = y$

г) $zx + z\bar{x}y = z(x + \bar{x}y) = z(x + \bar{x})(x + y) = z(x + y)$

д) $\overline{(A+B)}\overline{(\bar{A}+\bar{B})} = \bar{A}\bar{B} \cdot AB = 0$

ђ) $y(w\bar{z} + wz) + xy = yw(\bar{z} + z) + xy = yw + xy = y(w + x)$

6. Свести следеће Булове изразе на захтевани број словних ознака променљивих:
   а) $ABC + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC + AB\overline{C} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ на 5 слова
   б) $BC + A\overline{C} + AB + BCD$ на 4 слова
   в) $\overline{\left[\overline{(CD)} + A\right]} + A + CD + AB$ на 3 слова
   г) $(A + C + D)\left(A + C + \overline{D}\right)\left(A + \overline{C} + D\right)\left(A + \overline{B}\right)$ на 4 слова?

Решење:

а) $ABC + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC + AB\overline{C} + \overline{A}\overline{B}\overline{C} =$
$BC\left(A + \overline{A}\right) + \overline{A}\overline{B}\left(C + \overline{C}\right) + AB\overline{C} = BC + \overline{A}\overline{B} + AB\overline{C} =$
$B\left(C + A\overline{C}\right) + \overline{A}\overline{B} = B\left(C + \overline{C}\right)(C + A) + \overline{A}\overline{B} = B(C + A) + \overline{A}\overline{B}$

б) $BC + A\overline{C} + AB + BCD = BC(1 + D) + A\overline{C} + AB =$
$BC + A\overline{C} + AB = BC + A\overline{C} + AB\left(C + \overline{C}\right) =$
$BC + A\overline{C} + ABC + AB\overline{C} = BC(1 + A) + A\overline{C}(1 + B) = BC + A\overline{C}$

в) $\overline{\left[\overline{(CD)} + A\right]} + A + CD + AB = CD \cdot \overline{A} + CD + A(1 + B) =$
$CD\left(1 + \overline{A}\right) + A = CD + A$

г) $(A+C+D)\left(A+C+\overline{D}\right)\left(A+\overline{C}+D\right)\left(A+\overline{B}\right)=\left(A+C+D\overline{D}\right)\cdot$ $\cdot\left(A+\overline{C}+D\right)\left(A+\overline{B}\right)=\left(A+C\overline{C}+CD\right)\left(A+\overline{B}\right)=A+\overline{B}CD$

7. Одредити комплемент следећих Булових функција и редуковати их на минимални број словних ознака логичких промењљивих:
   а) $\left(B\overline{C}+\overline{A}D\right)\left(A\overline{B}+C\overline{D}\right)$
   б) $\overline{B}D+\overline{A}B\overline{C}+ACD+\overline{A}BC$
   в) $\left[\overline{(AB)}A\right]\left[\overline{(AB)}B\right]$
   г) $A\overline{B}+\overline{C}\,\overline{D}$?

Решење:

а) $\overline{\left[\left(B\overline{C}+\overline{A}D\right)\left(A\overline{B}+C\overline{D}\right)\right]}=\overline{\left[AB\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{A}\,\overline{B}D+BC\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}CD\overline{D}\right]}=$ $\overline{0}=1$

б) $\overline{\left[\overline{B}D+\overline{A}B\overline{C}+ACD+\overline{A}BC\right]}=\overline{\left[\overline{B}D+\overline{A}B\left(\overline{C}+C\right)+ACD\right]}=$ $\overline{\left[\overline{B}D+\overline{A}B+ACD\right]}=\overline{\left[\overline{A}B+D\left(\overline{B}+A\right)\left(\overline{B}+C\right)\right]}=$

$$= \left(A+\overline{B}\right)\left(\overline{D}+B\overline{A}+B\overline{C}\right) = \overline{BD} + A\left(\overline{D}+B\overline{C}\right)$$

в) $\left[\overline{(AB)A}\right]\left[\overline{(AB)B}\right] = \overline{0} = 1$

г) $\overline{\left[A\overline{B}+\overline{CD}\right]} = \left(\overline{A}+B\right)(C+D)$

8. Дате су две Булове функције F_1 и F_2:
   а) показати да Булова функција $E = F_1 + F_2$ је изграђена од суме свих минтермова функције F_1 и функције F_2
   б) показати да Булова функција $G = F_1 F_2$ садржи само заједничке минтермове функција F_1 и F_2?

Решење:

а) Вредност логичке функције E је једнака 1 на оним минтермовима на којима је вредност логичке функције F_1 једнака 1 или на којима је вредност логичке функције F_2 једнака 1 $\Longrightarrow$ функција E садржи суму минтермова функција F_1 и F_2.

б) Вредност функције G је једнака 1 на оним минтермовима на којима је вредност и логичке функције F_1 и F_2 једнака 1 тако да она садржи само заједничке минтермове функција F_1 и F_2.

9. Одредити табелу вредности за функцију:

$$F = xy + x\overline{y} + \overline{y}z?$$

Решење:

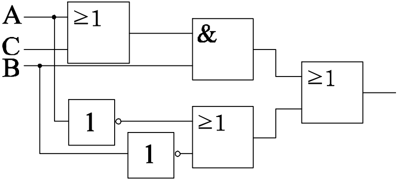
$$F = x(y + \overline{y}) + \overline{y}z = x + \overline{y}z$$

xyz	$\overline{y}$	$\overline{y}z$	$x + \overline{y}z$	xyz	$\overline{y}$	$\overline{y}z$	$x + \overline{y}z$
000	1	0	0	100	1	0	1
001	1	1	1	101	1	1	1
010	0	0	0	110	0	0	1
011	0	0	0	111	0	0	1

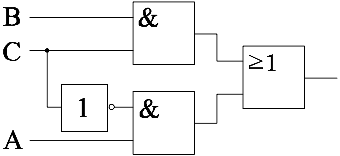
Аудиторне вежбе из Дигиталних система
Логички дијаграм

10. Реализовати минимизоване функције из 6. помоћу логичких елемената?
    Решење:

а)

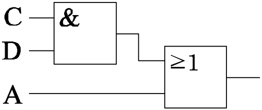


б)

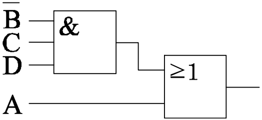


Логички дијаграм

в)



г)

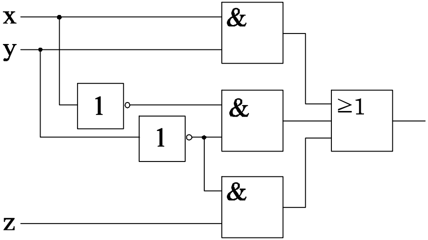


11. Дата је логичка функција $F = xy + \overline{xy} + \overline{y}z$

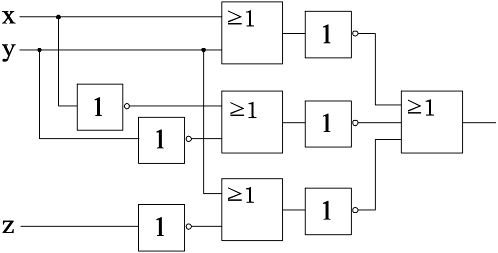
   а) Дати њену И, ИЛИ, НЕ реализацију
   б) Реализовати је само помоћу ИЛИ и НЕ логичких елемената
   в) Реализовати је само помоћу И и НЕ логичких елемената?

Решење:

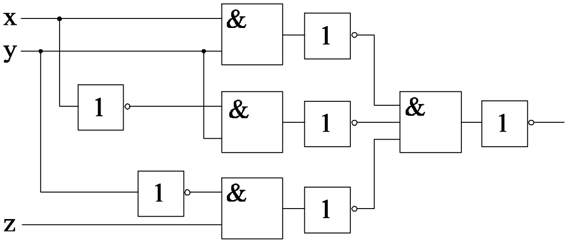
Логички дијаграм



а)



б)



a)

12. Упростити функције T_1 и T_2 у минимални број словних ознака променљивих:

ABC	T_1	T_2	ABC	T_1	T_2
000	1	0	100	0	1
001	1	0	101	0	1
010	0	0	110	0	1
011	0	1	111	0	1

Решење:

$T_1 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C}$

$T_2 = (A + B + C)\left(A + B + \overline{C}\right)\left(A + \overline{B} + C\right)$

$T_1 = \overline{A}\,\overline{B}\left(\overline{C} + C\right) + \overline{A}B\overline{C} = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B\overline{C} = \overline{A}\left(\overline{B} + B\overline{C}\right) =$
$\overline{A}\left(\overline{B} + B\right)\left(\overline{B} + \overline{C}\right) = \overline{A}\left(\overline{B} + \overline{C}\right)$

$T_2 = \left(A + B + C\overline{C}\right)\left(A + \overline{B} + C\right) = (A + B)\left(A + \overline{B} + C\right) = A + BC =$
$\overline{T_1}$

13. Изразити следеће функције као суме минтермова и производе макстермова:
   а) $F(A, B, C, D) = D\left(\overline{A} + B\right) + \overline{B}D$
   б) $F(w, x, y, z) = \overline{y}z + wx\overline{y} + wx\overline{z} + \overline{w}\,\overline{x}z$
   в) $F(A, B, C, D) =$
   $\left(A + \overline{B} + C\right)\left(A + \overline{B}\right)\left(A + \overline{C} + \overline{D}\right)\left(\overline{A} + B + C + \overline{D}\right)\left(B + \overline{C} + \overline{D}\right)$
   г) $F(A, B, C) = \left(\overline{A} + B\right)\left(\overline{B} + C\right)$
   д) $F(x, y, z) = 1$
   ђ) $F(x, y, z) = (xy + z)(y + xz)$

Решење:

а) $F(A,B,C,D) = D\left(\overline{A}+B\right) + \overline{B}D = D\left(\overline{A}+B+\overline{B}\right) = D =$
$\left(A+\overline{A}\right)\left(B+\overline{B}\right)\left(C+\overline{C}\right)D = \left(AB+\overline{A}B+A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B}\right)\cdot$
$\left(CD+\overline{C}D\right) = ABCD+\overline{A}BCD+A\overline{B}CD+\overline{A}\,\overline{B}CD+AB\overline{C}D+$
$\overline{A}B\overline{C}D+A\overline{B}\,\overline{C}D+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D = \sum(1,3,5,7,9,11,13,15)$
$F(A,B,C,D) = A\overline{A}+B\overline{B}+C\overline{C}+D = \left(A+B\overline{B}+C\overline{C}+D\right)\cdot$
$\left(\overline{A}+B\overline{B}+C\overline{C}+D\right) = \left(A+B+C\overline{C}+D\right)\left(A+\overline{B}+C\overline{C}+D\right)\cdot$
$\left(\overline{A}+B+C\overline{C}+D\right)\left(\overline{A}+\overline{B}+C\overline{C}+D\right) = \left(A+B+C+D\right)\cdot$
$\left(A+B+\overline{C}+D\right)\left(A+\overline{B}+C+D\right)\left(A+\overline{B}+\overline{C}+D\right)\cdot$
$\left(\overline{A}+B+C+D\right)\left(\overline{A}+B+\overline{C}+D\right)\left(\overline{A}+\overline{B}+C+D\right)\cdot$
$\left(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+D\right) = \prod(0,2,4,6,8,10,12,14)$

б) $F(w,x,y,z) = \overline{y}z+wx\overline{y}+wx\overline{z}+\overline{w}\,\overline{x}z = \left(w+\overline{w}\right)\left(x+\overline{x}\right)\overline{y}z+$
$wx\overline{y}\left(z+\overline{z}\right)+wx\left(y+\overline{y}\right)\overline{z}+\overline{w}\,\overline{x}\left(y+\overline{y}\right)z = \left(w+\overline{w}\right)\left(x\overline{y}z+\overline{x}\,\overline{y}z\right)+$
$wx\overline{y}z+wx\overline{y}\,\overline{z}+wxy\overline{z}+wx\overline{y}\,\overline{z}+\overline{w}\,\overline{x}yz+\overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}z = wx\overline{y}z+w\overline{x}\,\overline{y}z+$
$\overline{w}x\overline{y}z+\overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}z+wx\overline{y}\,\overline{z}+wxy\overline{z}+\overline{w}\,\overline{x}yz = \sum(1,3,5,9,12,13,14)$

$\overline{F}(w,x,y,z) = (y+\overline{z})(\overline{w}+\overline{x}+y)(\overline{w}+\overline{x}+z)(w+x+\overline{z}) = (y+\overline{z})\cdot$
$(\overline{w}+\overline{x}+yz)(w+x+\overline{z}) = (\overline{w}+\overline{x}+yz)(\overline{z}+wy+xy) = \overline{wz}+\overline{xz}+$
$w\overline{x}y+wyz+\overline{w}xy+xyz$

$F = (w+z)(x+z)(\overline{w}+x+\overline{y})(\overline{w}+\overline{y}+\overline{z})(w+\overline{x}+\overline{y})(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}) =$
$(w+x\overline{x}+y\overline{y}+z)(w\overline{w}+x+y\overline{y}+z)(\overline{w}+x+\overline{y}+z\overline{z})(\overline{w}+x\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})\cdot$
$(w+\overline{x}+\overline{y}+z\overline{z})(w\overline{w}+\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}) = (w+x+y\overline{y}+z)\cdot$
$(w+\overline{x}+y\overline{y}+z)(\overline{w}+x+y\overline{y}+z)(\overline{w}+x+\overline{y}+z)(\overline{w}+x+\overline{y}+\overline{z})\cdot$
$(\overline{w}+x+\overline{y}+\overline{z})(w+\overline{x}+\overline{y}+z)(w+\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})(\overline{w}+\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}) =$
$(w+x+y+z)(w+x+\overline{y}+z)(w+\overline{x}+y+z)(w+\overline{x}+\overline{y}+z)\cdot$
$(\overline{w}+x+y+z)(\overline{w}+x+\overline{y}+z)(\overline{w}+x+\overline{y}+\overline{z})(w+\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})\cdot$
$(\overline{w}+\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}) = \prod(0,2,4,6,7,8,10,11,15)$

в) $F(A,B,C,D) = (A+\overline{B}+C)(A+\overline{B})(A+\overline{C}+\overline{D})\cdot$
$(\overline{A}+B+C+\overline{D})(B+\overline{C}+\overline{D}) = (A+\overline{B}+C+D)\cdot$
$(A+\overline{B}+C+\overline{D})(A+\overline{B}+\overline{C}+D)(A+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})(A+B+\overline{C}+$
$\overline{D})(\overline{A}+B+C+\overline{D})(\overline{A}+B+\overline{C}+\overline{D}) = \prod(3,4,5,6,7,9,11)$

$F(A,B,C,D) = \sum(0,1,2,8,10,12,13,14,15)$

г) $F(A,B,C) = (\overline{A}+B)(\overline{B}+C) = (\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C}) \cdot (A+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+C) = \prod(2,4,5,6) = \sum(0,1,3,7)$

д) $F(x,y,z) = 1 = \sum(0,1,2,3,4,5,6,7)$

ђ) $F(x,y,z) = (xy+z)(y+xz) = xy+yz+xyz+xz = xyz+xy\overline{z}+\overline{x}yz+x\overline{y}z = \sum(3,5,6,7) = \prod(0,1,2,4)$

14. Претворити следеће функције у други канонички облик различит од датог:
    - а) $F(x,y,z) = \sum(1,3,7)$
    - б) $F(A,B,C,D) = \sum(0,2,6,11,13,14)$
    - в) $F(x,y,z) = \prod(0,3,6,7)$
    - г) $F(A,B,C,D) = \prod(0,1,2,3,4,6,12)$?

    Решење:
    - а) $F(x,y,z) = \sum(1,3,7) = \prod(0,2,4,5,6)$
    - б) $F(A,B,C,D) = \sum(0,2,6,11,13,14) = \prod(1,3,4,5,7,8,9,10,12,15)$
    - в) $F(x,y,z) = \prod(0,3,6,7) = \sum(1,2,4,5)$

г) $F(A,B,C,D) = \prod(0,1,2,3,4,6,12) = \sum(5,7,8,9,10,11,13,14,15)$

15. Каква је разлика између каноничке и стандардне форме. Која је форма пожељнија када се реализује помоћу логичких елемената. Која се форма добија када се логичка функција одређује на основу табеле вредности?
    Решење:
    Канонична форма је састављена од потпуних производа или потпуних збирова а стандардна форма од непотпуних. Пожељнија је стандардна форма за реализацију. На основу табеле вредности добијају се каноничке форме.
16. Сума свих минтермова Булове функције од n променљивих је 1.
    а) доказати горње тврђење за $n = 3$
    б) предложити поступак за доказ у општем случају.

Решење:

а) $\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3+\overline{x}_1\overline{x}_2x_3+\overline{x}_1x_2\overline{x}_3+\overline{x}_1x_2x_3+x_1\overline{x}_2\overline{x}_3+x_1\overline{x}_2x_3+x_1x_2\overline{x}_3+x_1x_2x_3 = \overline{x}_1\overline{x}_2\left(\overline{x}_3+x_3\right)+\overline{x}_1x_2\left(\overline{x}_3+x_3\right)+x_1\overline{x}_2\left(\overline{x}_3+x_3\right)+x_1x_2\left(\overline{x}_3+x_3\right) = \overline{x}_1\overline{x}_2+\overline{x}_1x_2+x_1\overline{x}_2+x_1x_2 = \overline{x}_1\left(\overline{x}_2+x_2\right)+x_1\left(\overline{x}_2+x_2\right) = \overline{x}_1+x_1 = 1$

б) Минтермови се поделе на узастопне парове који се разликују у променљивој најнижег разреда и ти парови се сажимају. Добијене импликанте се поделе на узастопне парове који се разликују у променљивој следећег разреда и ти парови се сажимају. И тако редом док се не стигне до највишег разреда када су сабирци две импликанте од једне променљиве од којих је једна у афирмацији а друга у негацији и оне дају 1.

17. Производ свих макстермова Булове функције оф n променљивих је 0.

   а) доказати горње тврђење за $n=3$

б) предложити поступак доказа у општем случају. Може ли се користити принцип дуалности у односу на предходни проблем?

Решење:

а) $(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+\overline{x}_3)(x_1+\overline{x}_2+x_3)(x_1+\overline{x}_2+\overline{x}_3)\cdot$
$(\overline{x}_1+x_2+x_3)(\overline{x}_1+x_2+\overline{x}_3)(\overline{x}_1+\overline{x}_2+x_3)(\overline{x}_1+\overline{x}_2+\overline{x}_3)=$
$(x_1+x_2+x_3\overline{x}_3)(x_1+\overline{x}_2+x_3\overline{x}_3)(\overline{x}_1+x_2+x_3\overline{x}_3)(\overline{x}_1+\overline{x}_2+x_3\overline{x}_3)=$
$(x_1+x_2)(x_1+\overline{x}_2)(\overline{x}_1+x_2)(\overline{x}_1+\overline{x}_2)=(x_1+x_2\overline{x}_2)(\overline{x}_1+x_2\overline{x}_2)=$
$x_1\overline{x}_1=0$

б) Узастопни парови макстермова се разликују у најнижем разреду тако да се после примене дистрибутивног закона та променљива губи. Узастопни парови добијених непотпуних збирова се разликују на следећем вишем разреду тако да се после примене дистрибутивног закона губи и та променљива. Наставља се поступак док се не дође до највишег разреда када постоје само два непотпуна збира од по једне променљиве од којих је једна у афирмацији а друга у негацији (иста променљива).

18. Показати да је дуални израз за ISKLJUČNO ILI логичку функцију једнак њеном комплементу?
    Решење:
    $x_1 \oplus x_2 = x_1\overline{x}_2 + \overline{x}_1 x_2 \Longrightarrow$ дуал$(x_1 \oplus x_2) = (x_1 + \overline{x}_2)(\overline{x}_1 + x_2) =$
    $x_1\overline{x}_1 + \overline{x}_1\overline{x}_2 + x_1x_2 + x_2\overline{x}_2 = \overline{x}_1\overline{x}_2 + x_1x_2 = x_1 \odot x_2$
    (комплемент од $x_1 \oplus x_2$).
19. Показати:
    а) да бинарни оператори INHIBICIJA и IMPLIKACIJA нису ни комутативни ни асоцијативни
    б) да су ISKLJUČNO ILI и EKVIVALENCIJA оператори комутативни и асоцијативни
    в) NI оператор није асоцијативан
    г) NILI и NI оператори нису дистрибутивни?

Решење:

а) $x/y = x\bar{y}; y/x = y\bar{x} \Longrightarrow x/y \neq y/x$
$(x/y)/z = (x/y)\bar{z} = x\bar{y}\bar{z}; x/(y/z) = x\overline{(y/z)} = x\overline{(y\bar{z})} = x(\bar{y}+z) = x\bar{y} + xz \Longrightarrow (x/y)/z \neq x/(y/z)$
$x \subset y = x + \bar{y}; x \supset y = \bar{x} + y \Longrightarrow x \subset y \neq x \supset y$
$(x \subset y) \subset z = (x+\bar{y}) + \bar{z} = x + \bar{y} + \bar{z}; x \subset (y \subset z) = x + \overline{(y+\bar{z})} = x + \bar{y}z \Longrightarrow (x \subset y) \subset z \neq x \subset (y \subset z)$

б) $x_1 \oplus x_2 = x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1x_2; x_2 \oplus x_1 = x_2\bar{x}_1 + \bar{x}_2x_1 \Longrightarrow x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$
$(x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = (x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1x_2)\bar{x}_3 + \overline{(x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1x_2)}x_3 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + (\bar{x}_1 + x_2)(x_1 + \bar{x}_2)x_3 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + x_1x_2x_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$
$x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = x_1\overline{(x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_2x_3)} + \bar{x}_1(x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_2x_3) = x_1(\bar{x}_2 + x_3)(x_2 + \bar{x}_3) + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 = x_1x_2x_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \Longrightarrow (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3)$
$x_1 \odot x_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2 + x_1x_2; x_2 \odot x_1 = \bar{x}_2\bar{x}_1 + x_2x_1 \Longrightarrow x_1 \odot x_2 = x_2 \odot x_1$
$(x_1 \odot x_2) \odot x_3 = \overline{(\bar{x}_1\bar{x}_2 + x_1x_2)}\bar{x}_3 + (\bar{x}_1\bar{x}_2 + x_1x_2)x_3 =$

$\overline{(\bar{x}_1\bar{x}_2)\ \ (x_1x_2)}\bar{x}_3+\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+x_1x_2x_3=$
$(x_1+x_2)\left(\bar{x}_1+\bar{x}_2\right)\bar{x}_3+\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+x_1x_2x_3=\bar{x}_1x_2\bar{x}_3+x_1\bar{x}_2\bar{x}_3+\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+x_1x_2x_3$
$x_1\odot(x_2\odot x_3)=\bar{x}_1\overline{(\bar{x}_2\bar{x}_3+x_2x_3)}+x_1\left(\bar{x}_2\bar{x}_3+x_2x_3\right)=$
$\bar{x}_1\left(x_2+x_3\right)\left(\bar{x}_2+\bar{x}_3\right)+x_1\bar{x}_2\bar{x}_3+x_1x_2x_3=$
$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+\bar{x}_1x_2\bar{x}_3+x_1\bar{x}_2\bar{x}_3+x_1x_2x_3\Longrightarrow(x_1\odot x_2)\odot x_3=x_1\odot(x_2\odot x_3)$

в) $(x_1\uparrow x_2)\uparrow x_3=\overline{\left(\overline{(x_1x_2)}x_3\right)}=\overline{\left[\left(\bar{x}_1+\bar{x}_2\right)x_3\right]}=x_1x_2+\bar{x}_3$

$x_1\uparrow(x_2\uparrow x_3)=\overline{\left[x_1\overline{(x_2x_3)}\right]}=\bar{x}_1+x_2x_3\Longrightarrow$

$(x_1\uparrow x_2)\uparrow x_3\neq x_1\uparrow(x_2\uparrow x_3)$

г) $x_1\downarrow x_2\uparrow x_3=\overline{\left[x_1+\overline{(x_2x_3)}\right]}=\bar{x}_1\left(x_2x_3\right)=\bar{x}_1x_2x_3$

$(x_1\downarrow x_2)\uparrow(x_1\downarrow x_3)=\overline{\left[\overline{(x_1+x_2)(x_1+x_3)}\right]}=(x_1+x_2)+(x_1+x_3)=$
$x_1+x_2+x_3\Longrightarrow x_1\downarrow x_2\uparrow x_3\neq(x_1\downarrow x_2)\uparrow(x_1\downarrow x_3)$

20. "Већински" логички елемент је онај чији је излаз једнак 1 ако је већина улаза једнака јединици, у супротном излаз је 0. Помоћу табеле вредности одредити логичку функцију реализовану помоћу "већинског" логичког елемента са три улаза. Упростити ту функцију?
Решење:

x_1	x_2	x_1	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$F = \overline{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \overline{x}_2 x_3 + x_1 x_2 \overline{x}_3 + x_1 x_2 x_3 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$

21. Верификовати табелу вредности за ISKLJUČNO ILI логички елемент са три улаза. Излистати све варијације за x_1, x_2, x_3 и прво одредити вредности за $A = x_1 \oplus x_2$ а потом за $F = A \oplus x_3 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$

x_1	x_2	x_1	$F = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

?

Решење:

x_1	x_2	x_1	$A = x_1 \oplus x_2$	$F = A \oplus x_3$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	1

22. TTL SSI интегрисана кола су најчешће са 14 извода. Два извода су резервисана за напајање а остали су намењени за улазне и излазне величине. Колико је логичких елемената у таквом интегрисаном колу ако су у питању следећи типови логичких елемената:

а) ISKLJUČNO ILI логичка кола са два улаза
б) I логички елементи са три улаза
в) NI логички елементи са четири улаза
г) NILI логички елементи са пет улаза
д) NI логички елементи са осам улаза

Решење:

а) Четири логичка елемента
б) Три логичка елемента
в) Два логичка елемента и два извода су неискоришћена
г) Два логичка елемента
д) Један логички елемент и три извода су неискоришћена.